Math. P.
358.111

Math. p.
358 m

Milinowski

ELEMENTAR-SYNTHETISCHE

GEOMETRIE

DER

GLEICHSEITIGEN HYPERBEL

VON

A. MILINOWSKI,

OBERLEHRER AM GYMNASIUM ZU WEISSENBURG I. E.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1883.

83 H

Neuer Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

1883.

Bardey, Dr. **Ernst,** algebraische Gleichungen nebst den Methoden zu ihrer Auflösung. Dritte, revidirte und abermals stark vermehrte Auflage. [XIII u. 378 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 6.80.

Burmester, Dr. **L.,** Professor der darstellenden Geometrie am Königlichen Polytechnikum zu Dresden, Grundzüge der Reliefperspective nebst Anwendung zur Herstellung reliefperspectivischer Modelle. Als Ergänzung zum Perspectiv-Unterricht an Kunstakademien, Kunstgewerbeschulen und technischen Lehranstalten bearbeitet. Mit drei lithographirten und einer Lichtdrucktafel. [IV u. 30 S.] gr. 8. geb. n. *M.* 2.—

Cantor, Dr. **Georg,** ord. Professor an der Universität Halle-Wittenberg, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. [IV u. 47 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.20.

Euclidis opera omnia. Ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge. Euclidis elementa. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg, Dr. phil. Uol. I. Libros I—IV continens. [X u. 333 S.] 8. geh. *M.* 3.60.

Fiedler, Dr. **Wilhelm,** die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Dritte erweiterte Auflage. I. Theil. A. u. d. Titel: Die Methoden der darstellenden Geometrie und die Elemente der projektivischen Geometrie. Für Vorlesungen und zum Selbststudium. [XXVI u. 376 S. mit vielen Figuren im Text und 6 lithogr. Tafeln.] gr. 8. geh. n. *M.* 8.40.

Fort, O., und **O. Schlömilch,** Lehrbuch der analytischen Geometrie. Erster Theil: Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort, weil. Professor am kgl. sächs. Polytechnikum zu Dresden. Fünfte Auflage, besorgt von R. Heger in Dresden. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VIII u. 260 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 4.—

Graefe, Dr. **Friedrich,** Vorlesungen über die Theorie der Quaternionen mit Anwendung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. [IV u. 164 S. mit Figuren im Text.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.60.

ELEMENTAR-SYNTHETISCHE

GEOMETRIE

DER

GLEICHSEITIGEN HYPERBEL

VON

A. MILINOWSKI,

OBERLEHRER AM GYMNASIUM ZU WEISSENBURG I. E.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1883.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Vorwort.

Die Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel findet man in den Lehrbüchern über Kegelschnitte meist aus denjenigen der allgemeinen Hyperbel hergeleitet. Deshalb kann die Herleitung nicht denjenigen Grad der Einfachheit erreichen, zu dem man unschwer gelangt, wenn man von gewissen charakteristischen Beziehungen ausgeht. Die hauptsächlichsten sind wohl die beiden folgenden, von denen jede sofort auf die andere zurückgeführt werden kann: 1) Die gleichseitige Hyperbel ist das Erzeugnis zweier gleicher und ungleichlaufender projektivischer Strahlenbüschel oder elementar ausgedrückt, jede Sehne einer gleichseitigen Hyperbel erscheint den Endpunkten eines Durchmessers unter gleichen oder supplementären Winkeln. 2) Der Höhenpunkt eines der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks liegt auch auf derselben. — Steiner beweist diesen Satz (cf. die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung, bearbeitet von Geiser) mittelst des Paskalschen Satzes und durch Polarisation und auch sonst ist ein recht einfacher elementarer Beweis desselben nicht gegeben.

Bei einer Theorie der gleichseitigen Hyperbel müfste man also naturgemäfs von jener zuerst genannten Erzeugungsart ausgehen und man gelangt in der That mittelst derselben (112—121) zu den wesentlichsten Eigenschaften in durchaus einfacher Weise. Wenn trotzdem ein anderer Weg eingeschlagen ist, der übrigens ebenso leicht zu den wichtigsten Sätzen führt, so geschah dies aus dem Grunde, dafs man auf demselben auch gleichzeitig zur Theorie der allgemeinen Hyperbel gelangt. Dieser Weg nimmt seinen Ausgangspunkt von den der Hyperbel eigenthümlichen Eigenschaften der

Asymptoten. Schon die einfache Form der Hyperbelgleichung in Bezug auf die Asymptoten führt darauf, die durch dieselbe ausgedrückte Beziehung zum Ausgangspunkte zu wählen. Diese Gleichung sagt aber aus, dafs jede Tangente auf den Asymptoten Strecken von konstantem Produkte begrenzt.

Dadurch wird man auf den Gedanken geführt, eine analoge Eigenschaft, die der Ellipse und Hyperbel gemeinsam zukommt, als Ausgangspunkt einer gemeinschaftlichen Behandlung beider Kurven zu wählen. Diese Eigenschaft, dafs jede Tangente auf den Scheiteltangenten Strecken von konstantem Produkte begrenzt, führt auch wirklich (221—227) in einfachster Weise zu den beiden Hauptarten von Eigenschaften der Kegelschnitte, zu denen der Brennpunkte und zu den harmonischen Eigenschaften.

Der tiefere Grund für diese leichte Herleitung der harmonischen Beziehungen aus den genannten Eigenschaften ist wohl darin zu suchen, dafs diese in metrischer Form ausgedrückten Eigenschaften eine fundamentale harmonische Beziehung zwischen vier Tangenten und in unmittelbarer Folge zwischen vier Punkten eines Kegelschnittes darstellen. Sie lassen sich in die Form bringen: Wenn vier Tangenten eine Scheiteltangente oder eine Asymptote harmonisch schneiden, so schneiden sie auch die andere und endlich jede Tangente harmonisch. — Auch bei der Parabel läfst sich diese Herleitung, in geeigneter Weise modifiziert (252—254) zur Anwendung bringen.

Die harmonischen Eigenschaften treten sofort, auch bei der elementaren Behandlung, in den Mittelpunkt der Betrachtung und erst die Erkenntnis der innigen Beziehungen zwischen den Brennpunkts- und Polareigenschaften läfst auch die harmonische Natur der ersteren hervortreten. Diese Beziehungen möglichst klar und einfach darzustellen wird das Ziel jeder elementaren Behandlung der Kegelschnitte sein müssen.

Die erste elementare Ableitung der Polareigenschaften, wenigstens für die Parabel, findet sich wohl in der kleinen Schrift von Simon: „Die Kegelschnitte behandelt für die Repetition in der Gymnasialprima. I. Teil. Die Parabel.“ Für alle drei Kegelschnitte gab darauf der Verfasser mehrere ele-

mentare Ableitungen (cf. Milinowski: „Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte, Leipzig, bei Teubner," und „die Kegelschnitte, behandelt für die oberen Klassen höherer Lehranstalten. Berlin bei Calvary"). Eine andere Ableitung findet sich in dem Buche von Taylor: „An introduction to the ancient and modern geometry of conics." Alle diese Ableitungen beruhen entweder auf der Abbildung des Kegelschnittes auf einem Kreise und setzen also die Polarentheorie desselben voraus oder sie haben doch nicht den wünschenswerten Grad von Einfachheit. — In den bairischen Blättern für das Realschulwesen hat neuerdings Haase eine Methode angegeben, die gleichzeitig die Eigenschaften der Brennpunkte und die harmonischen Eigenschaften und zwar für alle drei Kegelschnitte (158—161, 233, 234, 251) aus dem Satze herleitet, dafs die vier Geraden, welche zwei Punkte eines Kegelschnittes mit den beiden Brennpunkten verbinden, einen Kreis berühren. Zwar setzt diese Methode die Polarentheorie des Kreises nicht voraus, nimmt aber doch entferntere Kreiseigenschaften in Anspruch, so z. B. den Satz, dafs von den Ähnlichkeitspunkten dreier Kreise viermal je drei in einer Geraden liegen.

Der oben angegebene Satz von den Asymptoten und Scheiteltangenten führt ungemein einfach und nur mit Benutzung harmonischer Beziehungen zu der fundamentalen harmonischen Eigenschaft eines Kegelschnittes, dafs vier Punkte desselben, welche aus einem fünften Punkte durch harmonische Strahlen projiziert werden, aus jedem Kegelschnittpunkte durch solche Strahlen projiziert werden. Aus ihr fliefst die Polarentheorie (207, 221—227) der Kegelschnitte. Für die gleichseitige Hyperbel folgt die letzte unmittelbar aus dem Satze, dafs jede Sehne den Endpunkten eines Durchmessers unter gleichen oder supplementären Winkeln erscheint. (37.)

Zur Übertragung von Kreiseigenschaften auf den Kegelschnitt sind zwei Methoden zur Verwendung gekommen, diejenige der Centralprojektion (§ 5) und (153, 155, 260, 276) die der harmonischen Verwandtschaft (cf. Milinowski, Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte). Die letztere

ist in mancher Beziehung, namentlich aber da, wo es sich um Ausführung von Konstruktionen handelt, der ersten vorzuziehen, welche trotz gröfserer Anforderungen an die Vorstellungskraft besonders bei Herleitung metrischer Beziehungen schwerer anzuwenden ist. Dazu kommt, dafs die Handhabung des harmonischen Gebildes wegen seiner gleichzeitigen metrischen und Lagenbeziehungen ein vermittelndes Band bildet zwischen den bisherigen elementaren Betrachtungsweisen und den Methoden der Geometrie der Lage.

Im sechsten Paragraphen finden sich Ergänzungen und Aufgaben, unter denen die Konstruktion des Krümmungskreises (82—88), die Dreiteilung des Winkels (104. 271.), das Delische Problem (105—106), die Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel aus zwei Punkten und Tangenten (182—184.), die Erzeugung derselben mittelst des Kreisbüschels (125—128) und aus der Geraden (112—121) hervorgehoben werden mögen. Einzelne der Aufgaben dieses Paragraphen sind dem schon oben angeführten Werke von Taylor entnommen, der sie ohne Auflösung mitteilt.

Wegen der mannigfachen Beziehungen der gleichseitigen Hyperbel zu den übrigen Kegelschnitten sind die wesentlichsten Eigenschaften derselben im letzten Paragraphen zusammengestellt.

Unter allen Kegelschnitten ist keiner der elementaren Behandlung so zugänglich, wie die gleichseitige Hyperbel und trotzdem besitzt unsere mathematische Literatur kein Buch, welches die Eigenschaften derselben in elementarer und einheitlicher Weise im Zusammenhange darstellt. Dieses Ziel hat sich der Verfasser in vorliegendem Werkchen gesteckt und hofft dadurch Allen, welche Beruf oder Neigung zur elementaren Betrachtung der Kegelschnitte führen, keine unwillkommene Gabe darzubringen. Namentlich aber hofft er dadurch auch dem Gedanken, dafs das harmonische Gebilde ein durchaus elementares ist, weitere Geltung und der Anwendung desselben in der elementaren Geometrie gröfsere Ausbreitung zu verschaffen.

Weifsenburg im E., April 1883.

Milinowski.

Inhalt.

§ 1.

Punkte und Tangenten.

		Seite
1—2.	Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel mittelst ihrer Asymptoten; Konstruktion von Punkten der gleichseitigen Hyperbel; Gleichung derselben in Bezug auf die Asymptoten	1
3—7.	Konstruktion von Tangenten und Eigenschaften derselben	3
8.	Gleichheit je zweier Winkel über einer Sehne, deren Scheitel Endpunkte eines Durchmessers sind	5
9.	Der Höhenpunkt eines eingeschriebenen Dreiecks . . .	7
11—14.	Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel durch vier Punkte	9
15.	Schnitt eines Kreises mit einer gleichseitigen Hyperbel .	11
16—17.	Eigenschaften der Asymptoten	11
18.	Vom Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise	13
19.	Der Gaufs-Bodenmillersche Satz	14
20.	Von den Höhenpunkten der vier Dreiecke, welche von vier Geraden gebildet werden	15
21—22.	Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel aus vier Tangenten	18

§ 2.

Konjugierte Durchmesser.

23.	Definition der konjugierten Durchmesser	19
24.	Eigenschaften derselben	19
25.	Die konjugierte Hyperbel	20
26—27.	Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf zwei konjugierte Durchmesser	21

§ 3.

Die Brennpunkte.

29.	Definition der Brennpunkte	23
30—36.	Brennpunktseigenschaften	24

§ 4.

Die Polareigenschaften.

37.	Definition von Pol und Polare	28
38—39.	Polareigenschaften	29
40.	Konjugierte Punkte und Gerade; Poldreieck	31
41.	Vom umgeschriebenen Vierseit	31
42—43.	Lage des Mittelpunktes der gleichseitigen Hyperbel auf dem Umkreise eines jeden Poldreiecks; Konstruktion derselben aus vier Tangenten	33
45.	Andere Definition der Brennpunkte und Haupteigenschaften derselben	35

§ 5.

Die gleichseitige Hyperbel auf dem geraden Kreiskegel.

		Seite
46—47.	Die gleichseitige Hyperbel auf einem Kreiskegel, auf welchem jeder Achsenschnitt rechtwinklig ist	38
48—53.	Einige Eigenschaften der Asymptoten	40
54.	Die Brennpunkte und Leitlinien	45
55.	Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf die Achsen und Asymptoten	46
56—59.	Die gleichseitige Hyperbel auf einem beliebigen Kreiskegel	47
60—64.	Aufgaben	50

§ 6.

Ergänzungen und Aufgaben.

65—71.	Konstruktionen der gleichseitigen Hyperbel	53
72—74.	Die Schnittpunkte einer gleichseitigen Hyperbel mit einer Geraden und einem Kreise	54
82—88.	Aufgaben über den Krümmungskreis	55
90—91.	Organische Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel . .	57
95—96.	Das einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebene gleichseitige Dreieck	57
97—101.	Konstruktionen der gleichseitigen Hyperbel	58
102—103.	Das eingeschriebene Parallelogramm	59
104.	Einen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen	59
105—106.	Das Delische Problem: Einen Würfel zu vordoppeln . .	60
107—108.	Gleichseitige Hyperbeln mit gemeinschaftlichem Durchmesser	61
109—110.	Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel aus Punkten und Tangenten	61
111.	Verschiedene Erzeugungsarten der gleichseitigen Hyperbel	62
112—121.	Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel aus der Geraden	63
122.	Erzeugung derselben aus dem Kreise	65
123—124.	Ort der Spitze eines Dreiecks von konstanter Grundlinie und konstanter Differenz der anliegenden Winkel . . .	66
125—128.	Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel aus dem Kreisbüschel	66
129.	Zwei unter einem sehr kleinen Winkel geneigte teilweise ins Wasser getauchte Glasplatten werden längs einer gleichseitigen Hyperbel benetzt	67
130—145.	Aufgaben über konjugierte Durchmesser	68
146.	Konstruktion der Achsen aus einem Punkte und dem Scheitelkreise	71
147—150.	Konstruktion der Schnittpunkte einer gleichseitigen Hyperbel und eines Kreises oder zweier gleichseitigen Hyperbeln	71
151—152.	Die Normalen und Tangenten durch einen Punkt . .	72

Seite

153. Harmonische Beziehung zwischen der gleichseitigen Hyperbel und ihrem Scheitelkreise 73
154. Eigenschaften der Brennpunkte 75
155. Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel aus dem Kreise 75
156—157. Aufgaben über die Brennpunkte; Konstruktion der Tangenten durch einen Punkt 78
158—161. Die Vektorenkreise und die Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel mittelst der Brennpunkte, nebst Ableitung ihrer Polareigenschaften 78
162—163. Andere Begründung der harmonischen Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel 85
164—171. Aufgaben über Pol und Polare und Poldreiecke 87
172—173. Aufgaben über Brennpunkte und Leitlinien 89
174—181. Konstruktionen der gleichseitigen Hyperbel 90
182—184. Konstruktion der gleichseitigen Hyperbel aus zwei Punkten und zwei Tangenten 91

§ 7.

Hyperbel, Ellipse, Parabel.

185. Erzeugung der Hyperbel mittelst ihrer Asymptoten . . 92
186—191. Punkte und Tangenten der Hyperbel 92
192—193. Konjugierte Durchmesser 93
194—195. Die konjugierte Hyperbel 94
196—198. Eigenschaften konjugierter Durchmesser 95
199—206. Die Brennpunkte 96
207—213. Harmonische Eigenschaften der Hyperbel 99
214—218. Andere Ableitung der Brennpunktseigenschaften . . . 103
219—220 Erzeugung der allgemeinen Hyperbel aus der gleichseitigen durch proportionale Änderung der Ordinaten; harmonische Beziehung dieser beiden Hyperbeln zu einer Ellipse und dem Scheitelkreise, von denen die erste aus dem zweiten auch durch gleichgrofse proportionale Änderung der Ordinaten abgeleitet wird 107
221—227. Gemeinschaftlicher Ursprung von Ellipse und Hyperbel und gleichzeitige Ableitung ihrer Polar- und Brennpunktseigenschaften 109
228—234. Andere Ableitung der letzteren 112
235. Gleichung der Hyperbel und Ellipse in Bezug auf die Achsen 115
236—250. Parabel, Ellipse, Hyperbel 116
251. Herleitung der Polareigenschaften der Parabel aus dem Satze, dafs die Geraden, welche zwei Parabelpunkte mit dem endlichen und unendlich fernen Brennpunkte verbinden, einen Kreis berühren 121
252—254. Andere Ableitung der Polareigenschaften der Parabel aus dem Satze: In zwei Parabelpunkten P und Q ziehe man die Tangenten p und q, schneide mit ihnen die Scheiteltangente in P_1 und Q_1, und ziehe durch letztere

Seite

Punkte die Parallelen q_1 und p_1 zu p und q, so schneiden sich p_1, q_1, PQ in einem Punkte R der Achse 121

255. Erzeugung von Ellipse und Hyperbel durch ihre Tangenten 123

256. Ort einer Ebene durch den Scheitel eines Kreiskegels, deren Parallelebenen diesen in einer gleichseitigen Hyperbel schneiden 123

257. Erzeugung von Ellipse und Hyperbel aus dem Kreisbüschel 124

258. Die Ecken eines jeden einer Ellipse umgeschriebenen Parallelogramms liegen mit den Brennpunkten auf einer gleichseitigen Hyperbel 125

260. Harmonische Verwandtschaft zwischen einem Kreise und einer gleichseitigen Hyperbel 125

261. Jeder Kegelschnitt durch die Ecken und den Höhenpunkt eines Dreiecks ist eine gleichseitige Hyperbel . . 126

262—263. Beziehung zwischen der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel und der Rektifikation der Parabel 127

264—269. Der Ort einer Sehne einer gleichseitigen Hyperbel, welche einem Brennpunkte unter einem rechten Winkel erscheint, ist eine Parabel; der Ort des Poles dieser Sehne ist eine Hyperbel; der Ort des Fufspunktes der Senkrechten aus dem Brennpunkte auf die Sehne ist eine Gerade 128

270. Der Ort des Poles einer Sehne einer Parabel, welche dem Brennpunkte unter einem rechten Winkel erscheint, ist eine gleichseitige Hyperbel 132

271. Zwei Kegelschnitte von gemeinschaftlichem Brennpunkte und gemeinschaftlicher Leitlinie in der Lage, dafs sich in den einen ein Polygon zeichnen läfst, welches den anderen berührt und dessen Seiten dem Brennpunkte unter gleichen Winkeln erscheinen 133

Spezieller Fall, wenn die Kegelschnitte eine Hyperbel von der numerischen Excentricität 2 und eine Parabel und die Polygone gleichseitige Dreiecke sind.

Benutzung dieser Hyperbel zur Dreiteilung des Winkels 135

§ 1.

Punkte und Tangenten.

1. *Wenn man auf zwei festen Geraden a und a_1, die sich in M senkrecht schneiden, die Strecken MA und MA_1 nach bestimmter Richtung abschneidet, so daſs das Produkt derselben konstant gleich $4q^2$ ist, so hat die Mitte von AA_1 solche Entfernungen von den Geraden a und a_1, daſs ihr Produkt auch konstant gleich q^2 ist.*

Ist P die Mitte von AA_1 und sind PB und PB_1 senkrecht auf a und a_1, so ist

$$BP = \tfrac{1}{2}MA_1,\ B_1P = \tfrac{1}{2}MA,$$

also:

$$BP \,.\, B_1P = \tfrac{1}{4}MA \,.\, MA_1$$
$$= \tfrac{1}{4} \,.\, 4q^2 = q^2 \,.$$

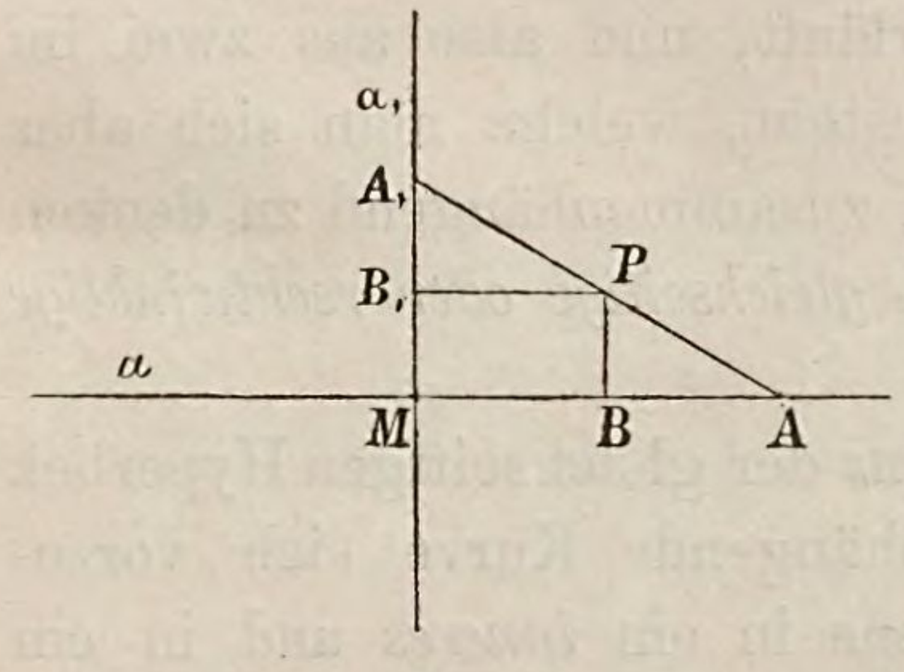

Fig. 1.

2. a) Wenn der Punkt A auf der Geraden a sich in bestimmter Richtung, etwa von M fort, bewegt, so nähert sich A_1 dem Punkte M; der Punkt P beschreibt dabei eine krumme Linie.

Gelangt A in den unendlich fernen Punkt U von a, so muſs A_1 mit M zusammenfallen und der Punkt P ist auch der unendlich ferne Punkt von a. Denkt man sich A_1 über M hinaus in seiner ursprünglichen Richtung weiter bewegt, also von M fort, so muſs sich auch A durch den unendlich fernen Punkt hindurch auf der anderen Seite von M nach diesem Punkte hin bewegen.

Der Punkt P gelangt bei dieser Bewegung auch über den unendlich fernen Punkt von a hinaus in den Scheitelwinkel desjenigen Winkels, in dem er sich zuerst befand.

Wenn bei der Bewegung von A und A_1 der erste Punkt nach M gelangt, so mufs A_1 und mit ihm auch P in den unendlich fernen Punkt U_1 von a_1 kommen.

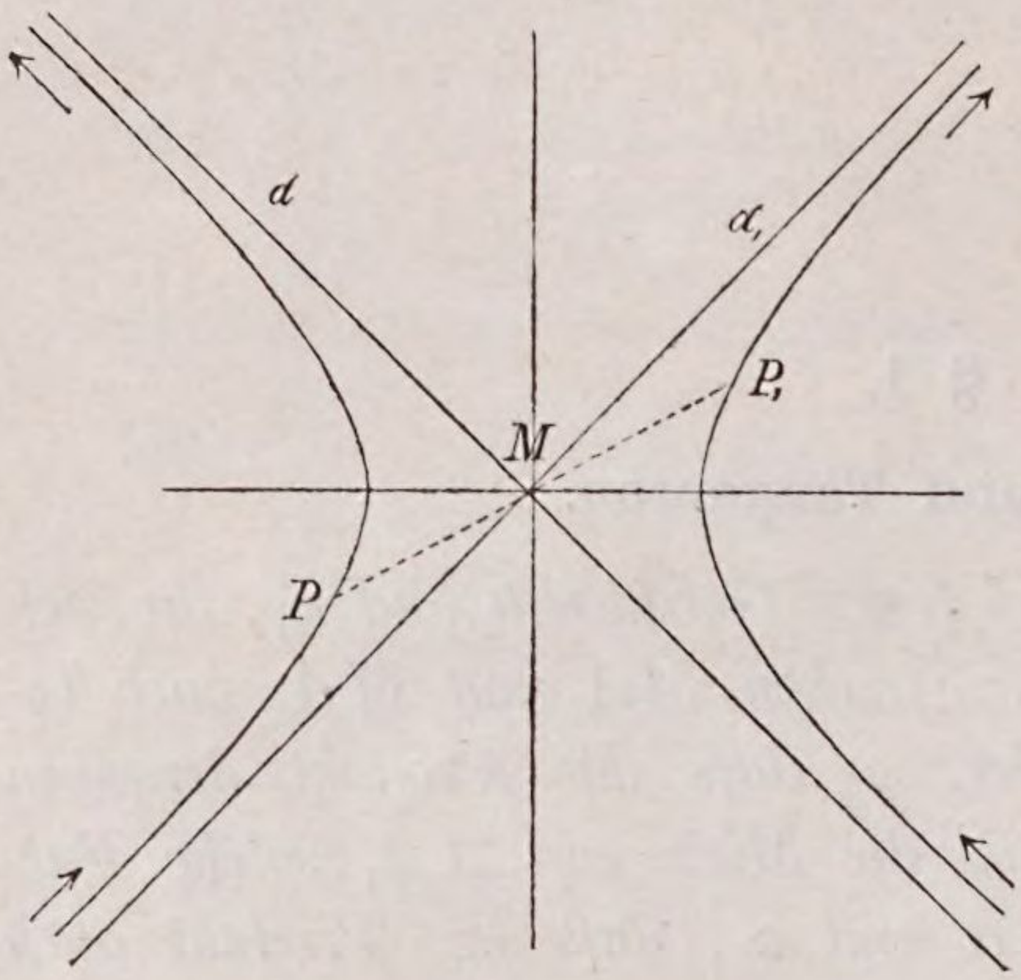

Fig. 2.

Es durchlaufen bei dieser Bewegung also die Punkte A und A_1 die Geraden a und a_1 in der Art, dafs wenn der eine von ihnen im Unendlichen, der andere sich in M befindet, wobei man sich die Gerade als im Unendlichen zusammenhängend vorzustellen hat. Dann durchläuft auch der Punkt P eine krumme Linie $H^{(2)}$, die in zwei Scheitelwinkeln der von a und a_1 gebildeten Winkel verläuft, und also aus zwei im Endlichen getrennten *Zweigen* besteht, welche man sich aber in zwei unendlich fernen Punkten zusammenhängend zu denken hat. Diese krumme Linie heifst *gleichseitige oder rechtwinklige Hyperbel.*

Das Produkt q^2 heifst die *Potenz* der gleichseitigen Hyperbel.

Da man sie als zusammenhängende Kurve sich vorzustellen hat, so teilt sie die Ebene in ein *inneres* und in ein *äusseres* Gebiet.

Bei seiner Bewegung nähert sich der Punkt P den beiden Geraden a und a_1 unbegrenzt, d. h. er trifft sie in ihren beiden unendlich fernen Punkten U und U_1. Da die beiden Geraden a und a_1 aufser U und U_1 keine Punkte mit $H^{(2)}$ gemeinsam haben können, wie aus der Entstehung der gleichseitigen Hyperbel folgt, so sind a und a_1 Tangenten derselben mit unendlich fernen Berührungspunkten. Sie heifsen ihre *Asymptoten.*

Ist P_1 der zu P in irgend einer seiner Lage bezüglich M symmetrische Punkt, so ist P_1 auch ein Punkt von $H^{(2)}$; jede Sehne der gleichseitigen Hyperbel durch M hat M zur Mitte; man nennt deshalb M den *Mittelpunkt*; jede Sehne durch ihn einen *Durchmesser.*

Nur ein Teil der Geraden durch M schneidet die Hyperbel; man nennt aber auch jede nicht schneidende Gerade einen Durchmesser.

Diejenigen Durchmesser, welche die Asymptotenwinkel halbieren und in Bezug auf welche $H^{(2)}$ symmetrisch liegt, heifsen die *Achsen*; diejenige Achse, welche die Hyperbel schneidet, heisst *die Hauptachse*, die andere die *Nebenachse*.

b) *Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf die Asymptoten.*

Bezeichnet man die von einem Punkte P von $H^{(2)}$ auf die Asymptoten gefällten Perpendikel mit x und y, so ist (cf. 1)

$$x \,.\, y = q^2$$

die Gleichung der Hyperbel.

3. *Jede Sekante der gleichseitigen Hyperbel wird von dieser und den Asymptoten in aequidistanten Punkten geschnitten.*

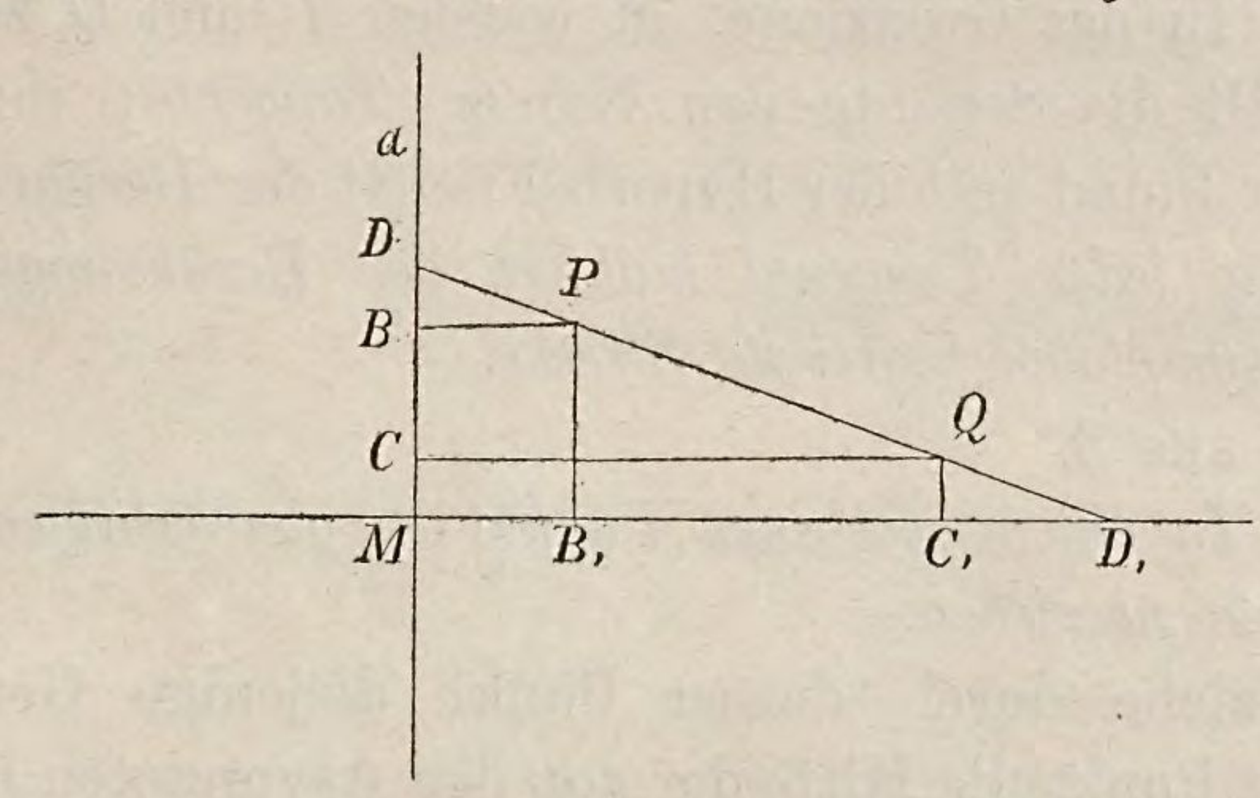

Fig. 3.

P und Q seien zwei Punkte der Hyperbel, von ihnen fälle man auf die Asymptoten die Senkrechten

$$PB \text{ und } PB_1, \quad QC \text{ und } QC_1$$

und schneide die Asymptoten mit PQ in D und D_1.

Dann ist:

$$PB : QC = PD : QD$$

$$PB_1 : QC_1 = PD_1 : QD_1 .$$

Multipliziert man gliedweise und berücksichtigt, daſs

$$PB \,.\, PB_1 = QC \,.\, QC_1$$

ist, so folgt:

$$PD \,.\, PD_1 = QD \,.\, QD_1$$

oder:

$$PD : QD = QD_1 : PD_1$$

und mit bekannter Umformung

$$PD - QD : QD_1 - PD_1 = PD : QD_1 = QD : PD_1,$$

und da:

$$PD - QD = QD_1 - PD_1 = PQ$$

ist, so hat man

$$PD = QD_1, \quad PD_1 = QD.$$

4. a) *Die gleichseitige Hyperbel wird von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten.*

Folgt aus 3.

b) Ist PQ eine Sekante der gleichseitigen Hyperbel und dreht man dieselbe in bestimmtem Sinne so um P, dafs Q sich diesem Punkte nähert, so wird er ihn schliefslich überschreiten. In der Grenzlage, in welcher P und Q zusammenfallen erhält die Sekante den Namen *Tangente*; ihr gemeinschaftlicher Punkt mit der Hyperbel heifst der *Berührungspunkt.*

c) *Auf jeder Tangente halbiert der Berührungspunkt die von den Asymptoten begrenzte Strecke.*

Folgt aus 3.

5. a) *In einem gegebenen Punkte der gleichseitigen Hyperbel die Tangente zu ziehen.*

Man ziehe durch diesen Punkt diejenige Gerade, auf welcher der Punkt die Mitte der von den Asymptoten begrenzten Strecke ist.

b) *Durch einen Punkt im inneren Gebiete der gleichseitigen Hyperbel läfst sich keine Tangente an dieselbe ziehen.*

Legt man durch einen Punkt P im inneren Gebiete der gleichseitigen Hyperbel eine Gerade g, so mufs sie dieselbe in zwei Punkten schneiden. Denn durchläuft P die Gerade in bestimmter Richtung, so überschreitet er die Hyperbel einmal wenn er aus dem inneren Gebiete austritt und nachdem er durchs Unendliche gegangen ist, bevor er in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, noch einmal, wenn er wieder in das innere Gebiet eintritt.

6. a) *Jede Tangente der gleichseitigen Hyperbel begrenzt mit den Asymptoten ein Dreieck von konstantem Inhalte.*

Ist (Fig. 1) AA_1 eine Tangente der gleichseitigen Hyperbel, P ihr Berührungspunkt, so ist:

$$PB \,.\, PB_1 = q^2,$$

also:

$$\triangle MAA_1 = \tfrac{1}{2} MA \,.\, MA_1 = 2\, PB \,.\, PB_1 = 2\, q^2.$$

b) *Alle Geraden, welche mit den Asymptoten Dreiecke von konstantem Inhalte begrenzen, umhüllen eine gleichseitige Hyperbel; die Mitten der Hypotenusen sind die Berührungspunkte.*

7. a) *Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel.*

Ist AA_1 ein Durchmesser und schneidet die Tangente in A die Asymptoten in B und C, so ist

$$MB \,.\, MC = 2\, q^2.$$

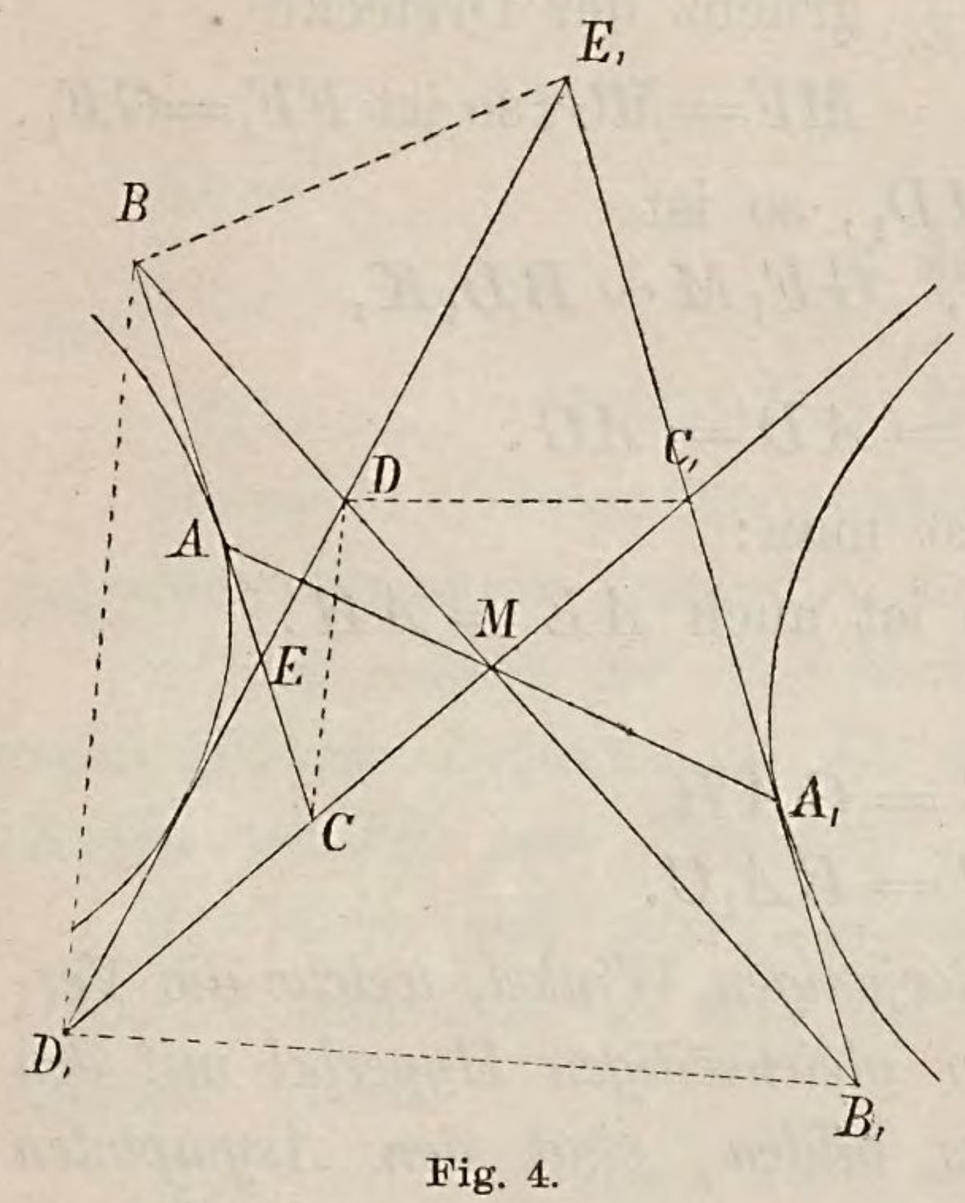

Fig. 4.

Die Parallele durch A_1 treffe die Asymptoten in B_1 und C_1, dann ist

$$MB = MB_1,\ MC = MC_1$$
$$MB_1 \,.\, MC_1 = 2\, q^2,$$

also B_1C_1 eine Tangente.

b) *Wenn zwei Tangenten die Asymptoten in EE_1 und FF_1 treffen, so ist:*

$$EF_1 \parallel E_1F.$$

Weil

$$ME \,.\, ME_1 = MF \,.\, MF_1 = 2\, q^2$$

ist, so folgt leicht:

$$ME : MF_1 = MF : ME_1$$
$$EF_1 \parallel E_1F.$$

8. a) *Jede Sehne einer gleichseitigen Hyperbel erscheint den Endpunkten eines Durchmessers unter gleichen oder supplementären Winkeln. Das erste ist der Fall, wenn die Sehne den Durchmesser schneidet, das letzte, wenn sie seine Verlängerung trifft.*

AA_1 sei ein Durchmesser, BC eine Sehne, so soll sein

$$\sphericalangle BAC = BA_1C.$$

Die Geraden AB, AC, A_1B schneiden die Asymptoten in DD_1, EE_1, FF_1. Man ziehe

$$AG \parallel A_1B,$$

so ist

$$\triangle AMG \cong A_1MF,$$

also

$$AG = A_1F = BF_1 \,(3),$$

und

$$AB \parallel GF_1.$$

Weil aber wegen Kongruenz der Dreiecke $MF{=}MG$, so ist $FF_1{=}GF_1$.

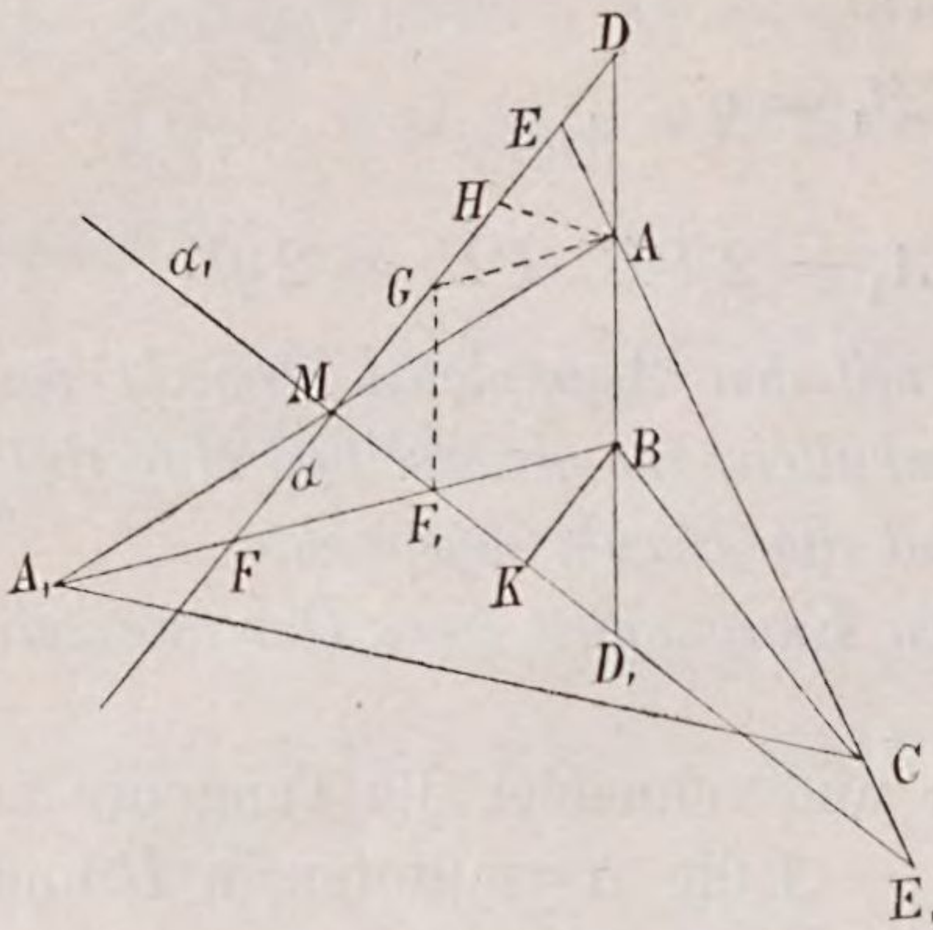

Fig. 5.

Fällt man noch $BK \perp MD_1$, so ist

$$\triangle FF_1M \sim BF_1K, \quad GF_1M \sim BD_1K,$$

also folgt

$$BF_1 = BD_1 = AD = AG.$$

In gleicher Weise schliefst man:

Wenn $AH \parallel A_1C$, so ist auch $AE = AH$.

Daraus aber folgt sofort:

$$\sphericalangle DAE = GAH$$
$$\sphericalangle BAC = BA_1C.$$

b) *Die Halbierungslinien derjenigen Winkel, welche die Verbindungslinien eines Punktes der gleichseitigen Hyperbel mit den Endpunkten eines Durchmessers bilden, sind den Asymptoten parallel.*

Im Beweise des vorigen Satzes wurde gefunden, dafs die Dreiecke

$$FF_1G \quad \text{und} \quad F_1BD_1$$

ähnlich sind. Der Winkel F_1 des ersteren wird durch die Asymptote a_1 halbiert; also müssen die Halbierungslinien der Winkel, welche im Punkte B von den Geraden BA und BA_1 gebildet werden, den Asymptoten parallel sein.

c) *Die Tangente in einem Punkte A der gleichseitigen Hyperbel bildet mit einer Sehne AB durch A denselben Winkel, unter welchem diese dem diametralen Punkte A_1 von A erscheint.*

Folgt aus a.

9. a) *Der Höhenpunkt eines jeden der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecks liegt auch auf derselben.*

ABC sei ein der Hyperbel eingeschriebenes Dreieck; die drei Höhen AD, BE, CF schneiden sich in H. Dann ist

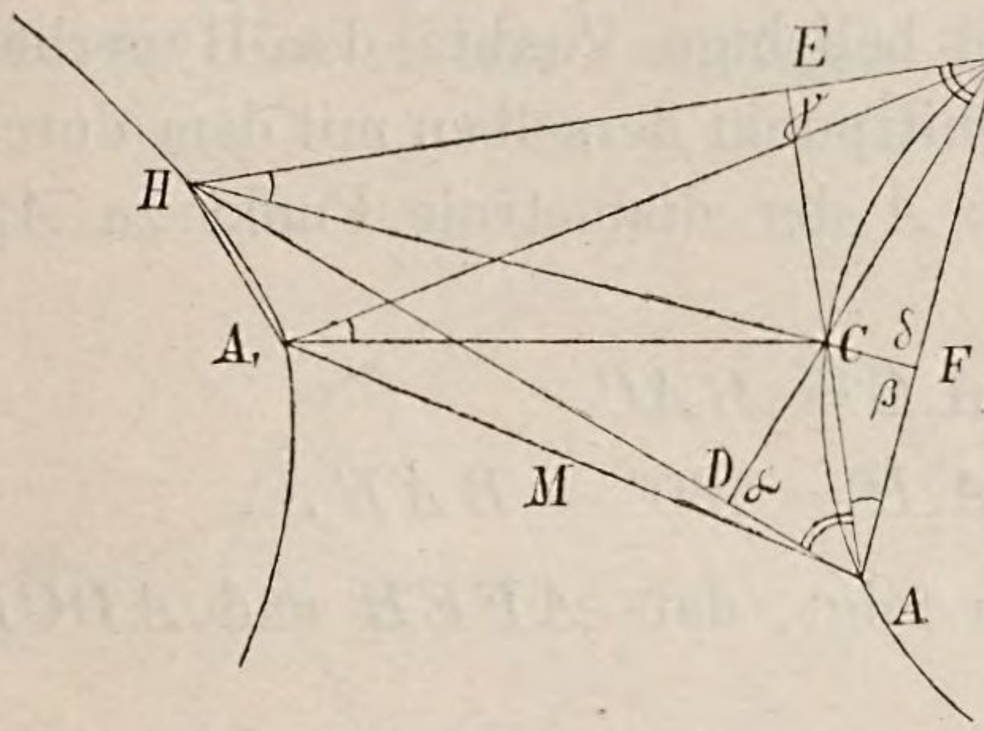

Fig. 6.

$$\sphericalangle BAC = BHC.$$

Zieht man den Durchmesser AA_1, so ist auch $\sphericalangle BAC = BA_1C = BHC$ und folglich ist A_1HBC ein Kreisviereck und $\sphericalangle HA_1C + HBC = 180^0$.

Aber

$$\sphericalangle HBC = HAC,$$

also

$$\sphericalangle HA_1C + HAC = 180^0.$$

Da somit CH den Endpunkten des Durchmessers AA_1 unter Supplementwinkeln erscheint, so liegt H auf der Hyperbel.

b) *In einem der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen rechtwinkligen Dreiecke ist die Senkrechte aus dem Scheitel des rechten Winkels eine Tangente.*

c) *Wenn sich zwei senkrechte Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel schneiden, so sind die Produkte aus ihren Abschnitten einander gleich.*

AB und CH seien zwei senkrechte Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel; man kann dann nach a) den Punkt H als den Höhenpunkt des Dreieckes ABC ansehen. Dann ist

$$\triangle AFC \sim BFH,$$

also:

$$AF : CF = HF : BF$$

und

$$AF \,.\, BF = CF \,.\, HF.$$

d) *Ist BCH ein der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenes Dreieck, A sein Höhenpunkt, A_1 der zu ihm diametrale Punkt, so liegen A_1BCH auf einem Kreise.*

Denn:

$$\sphericalangle BHC = BAC = BA_1C.$$

e) *Die gleichseitige Hyperbel wird von einem Kreise höchstens in vier Punkten geschnitten.*

In a) ist gezeigt, dafs vier Punkte einer gleichseitigen Hyperbel auf einem Kreise liegen, nämlich A_1, B, C, H.

Sind nun B, C, H drei beliebige Punkte der Hyperbel, ist weiter A_1 ein weiterer Schnittpunkt derselben mit dem durch jene gelegten Kreise und ist A der diametrale Punkt zu A_1, so ist

$$\sphericalangle BHC \doteq BA_1C = BAC$$
$$\sphericalangle BCH = BA_1H = 180^0 - BAH.$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dafs $AFEH$ und $ADCF$ Kreisvierecke sind; also

$$\sphericalangle \alpha + \beta = 180^0.$$

Sehr leicht ergiebt sich

$$\sphericalangle \alpha = \gamma = \delta.$$

Da auch wegen der Kreisvierecke $AFEH$ und $ADCF$

$$\sphericalangle EAF = EHF = CDF$$

ist, so mufs auch $BFDH$ ein Kreisviereck und

$$\sphericalangle \gamma = BDH,$$

also auch

$$\sphericalangle \gamma + BDH = 180^0 \text{ und } \gamma = BDH = 90^0$$

sein, d. h. C ist der Höhenpunkt von ABH oder A derjenige von BCH.

Daraus aber folgt unmittelbar, dafs der durch B, C, H gelegte Kreis, die gleichseitige Hyperbel nur noch in einem Punkte treffen kann.

f) Wenn der Punkt A_1 mit dem Punkte H zusammenfällt, so berührt der durch B, C, H gelegte Kreis die gleichseitige Hyperbel im Punkte A_1. In diesem Falle steht der Durchmesser AA_1 auf der Sehne BC senkrecht und es folgt der Satz:

Durch eine Sehne lassen sich zwei Kreise legen, welche die gleichseitige Hyperbel in denjenigen beiden Punkten berühren, in denen sie von dem zur Sehne senkrechten Durchmesser getroffen wird.

g) *Wenn ein Kreis eine gleichseitige Hyperbel berührt, so schneidet er sie noch in zwei Punkten, deren Verbindungslinie auf dem Durchmesser des Berührungspunktes senkrecht steht.*

Folgt aus f.

h) Ist A ein beliebiger Punkt der gleichseitigen Hyperbel, AM der durch ihn gehende Durchmesser, so errichte man in A auf diesem die Senkrechte. Dieselbe schneide die Hyperbel noch in B. Derjenige Kreis, welcher durch B geht und die Hyperbel in A berührt, hat also in diesem Punkte drei zusammenfallende Punkte mit der Hyperbel gemein. Er heifst der *Krümmungskreis* der Hyperbel im Punkte A.

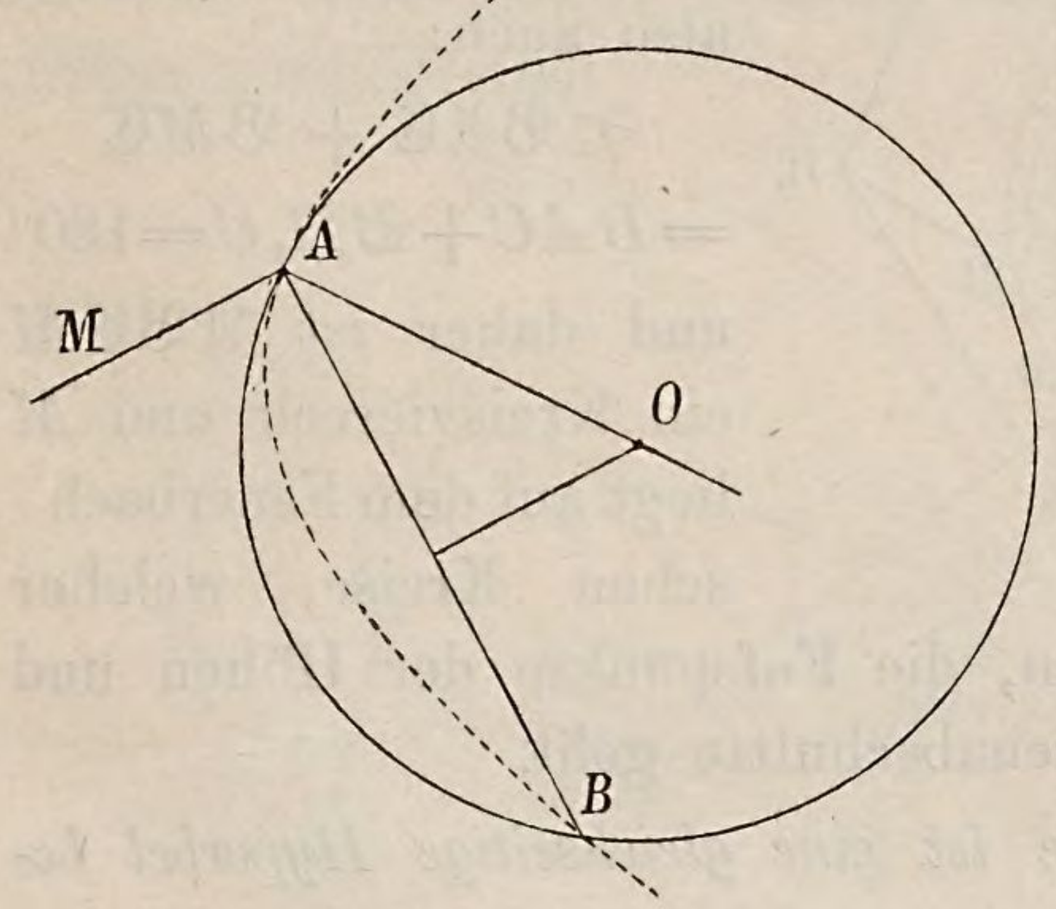

Fig. 7.

10. *Alle Kreise durch zwei feste Punkte einer gleichseitigen Hyperbel schneiden diese unter parallelen Sehnen.*

Hält man in Fig. 6 die Sehne BC fest, läfst aber den Punkt A die Hyperbel durchlaufen, so durchläuft auch der Höhenpunkt H des Dreiecks ABC dieselbe; die Gerade AH bleibt bei dieser Veränderung senkrecht zu BC. — Die Gerade AA_1 dreht sich dabei um den Mittelpunkt M, die Halbierungslinie des Winkels AHA_1 bleibt einer Asymptote parallel und weil AH sich parallel verschiebt, so mufs dies auch A_1H thun.

11. *In jedem einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecke liegen die Fufspunkte der Höhen auf einem Kreise, der durch den Mittelpunkt der Hyperbel geht* (Fig 8).

Das Dreieck ABC sei der Hyperbel eingeschrieben und H sei sein Höhepunkt, H_1 der ihm diametral gegenüber liegende, so ist $ABCH_1$ ein Kreisviereck (9 d.).

Die Höhen des Dreiecks ABC seien AD, BE, CF; diese schneiden sich in H und der Kreis, welcher durch die Fufs-

punkte D, E, F geht, halbiert die Höhenabschnitte AH, BH, CH in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$*).

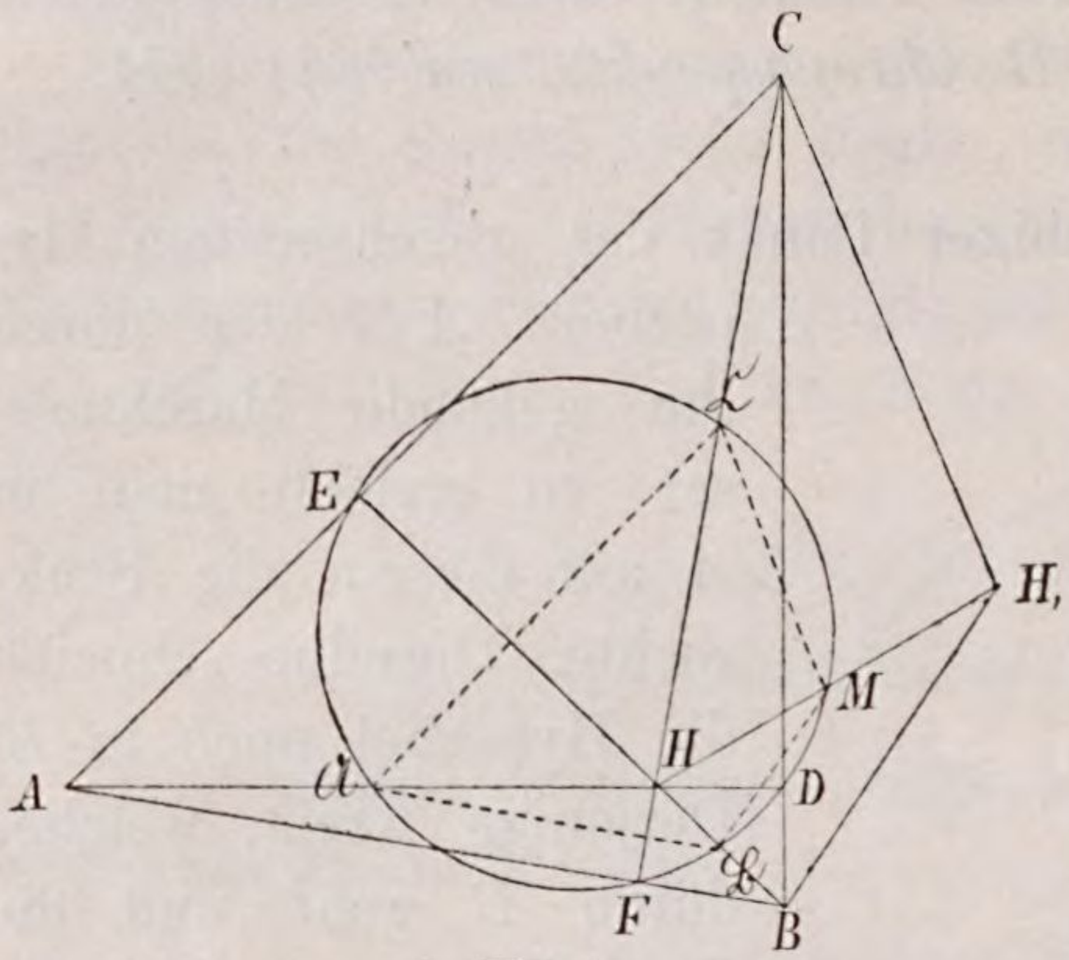

Fig. 8.

Es ergiebt sich sofort:

$\mathfrak{A}\mathfrak{B} \parallel AB$, $\mathfrak{B}M \parallel BH_1$,
$\mathfrak{C}M \parallel CH_1$, $\mathfrak{A}\mathfrak{C} \parallel AC$,

also auch:

$$\sphericalangle \mathfrak{B}\mathfrak{A}\mathfrak{C} + \mathfrak{B}M\mathfrak{C} = BAC + BH_1C = 180^0$$

und daher ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}M$ ein Kreisviereck und M liegt auf dem Feuerbach'schen Kreise, welcher durch die Mitten der Seiten, die Fufspunkte der Höhen und die Mitten der oberen Höhenabschnitte geht.

12. *Durch vier Punkte ist eine gleichseitige Hyperbel bestimmt.*

Sind $ABCD$ die vier gegebenen Punkte, so bestimme man in den Dreiecken ABC und ABD die Feuerbach'schen Kreise (Mittelkreise); diese schneiden sich in zwei Punkten. Der eine ist die Mitte von AB, der andere der Mittelpunkt M der gleichseitigen Hyperbel.

13. *Wenn sich zwei gleichseitige Hyperbeln in drei Punkten schneiden, so ist ihr vierter Schnittpunkt der Höhenpunkt des von den drei ersten gebildeten Dreiecks.*

Folgt aus 9a.

14. a) *Durch drei Punkte lassen sich unendlich viele gleichseitige Hyperbeln legen, welche sämtlich noch durch den Höhenpunkt des von jenen gebildeten Dreiecks gehen.*

Alle diese Hyperbeln bilden ein „Büschel"; von ihnen geht eine einzige durch einen bestimmten Punkt.

Folgt aus 9a. 13.

---

*) Jacob Steiners gesammelte Werke. Die geometrischen Konstruktionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. I. Bd. Seite 491. — Milinowski, die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. Seite 118.

b) *Die Mittelpunkte sämtlicher Hyperbeln eines Büschels liegen auf einem Kreise.*

Folgt aus 11.

15. *Die Gegenseiten eines der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Kreisvierecks sind gegen die Achsen gleich geneigt,* oder:

Die Sehnen, unter denen ein Kreis eine gleichseitige Hyperbel schneidet, bilden solche Winkel, dafs ihre Halbierungslinien den Achsen parallel sind.

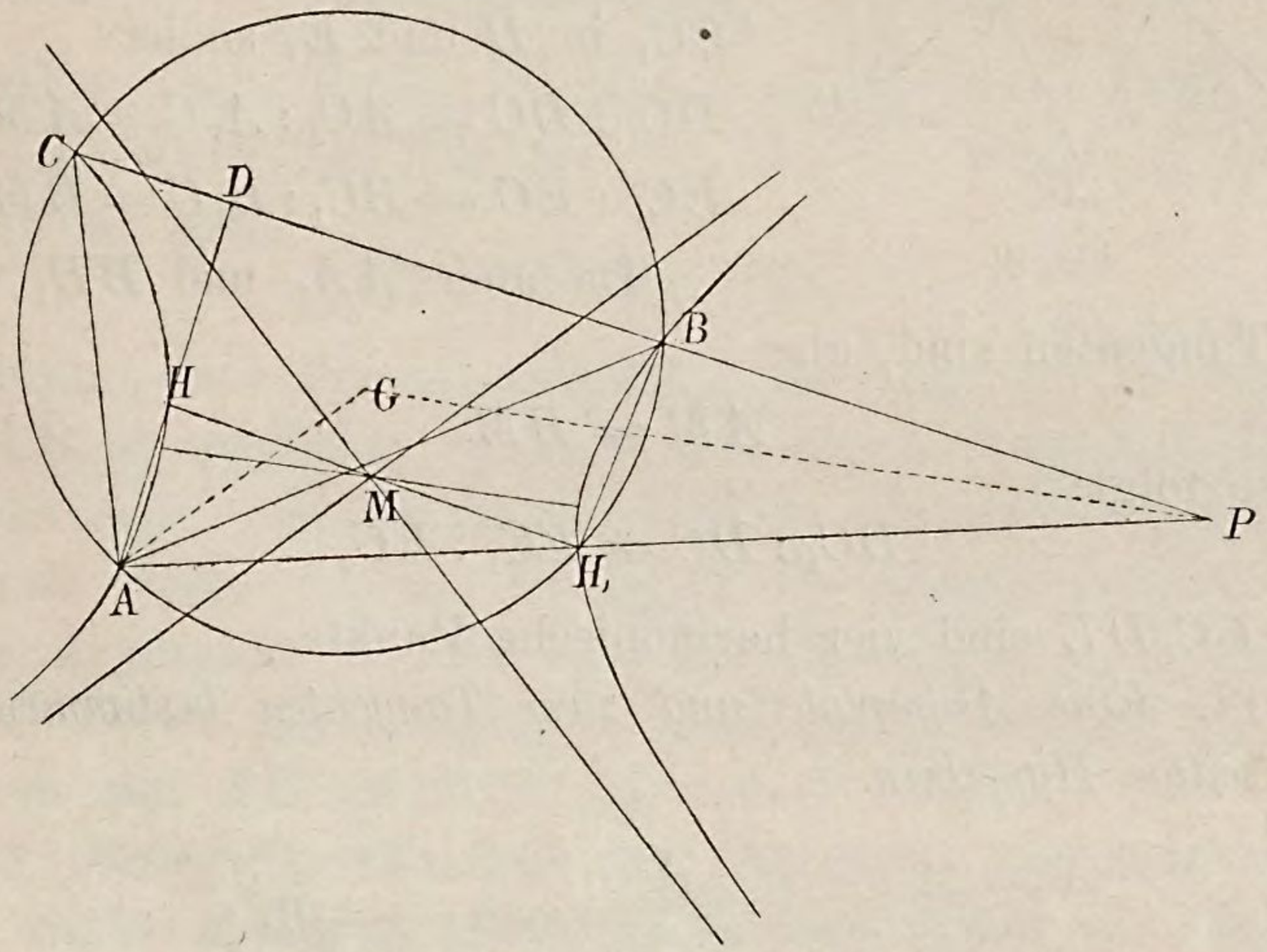

Fig. 9.

Ein Kreis schneide die gleichseitige Hyperbel in den vier Punkten $ABCH_1$; dann ist der zum Punkte H_1 diametrale Punkt H der Höhenpunkt des Dreiecks ABC. (9d.)

In dem Dreiecke ADP ist $\sphericalangle D = 90^0$; halbiert man die beiden anderen Winkel durch die Geraden AG und PG, so ist

$$\sphericalangle GAP + GPA = 45^0,$$
$$\sphericalangle AGP = 135^0.$$

Weil nun nach 8b. AG der einen Asymptote parallel ist und diese mit den Axen Winkel von 45^0 bildet, so mufs PG der einen Achse parallel sein.

16. *Die beiden Asymptoten und irgend zwei parallele Tangenten der gleichseitigen Hyperbel schneiden jede andere Tangente harmonisch.*

Die beiden Asymptoten werden von den parallelen Tangenten in A und A_1, B und B_1, von irgend einer dritten in C und C_1 geschnitten. Weil

$$AM.A_1M = BM.B_1M = CM.C_1M,$$

so ist

$$AC_1 \parallel A_1C, \quad BC_1 \parallel B_1C.$$

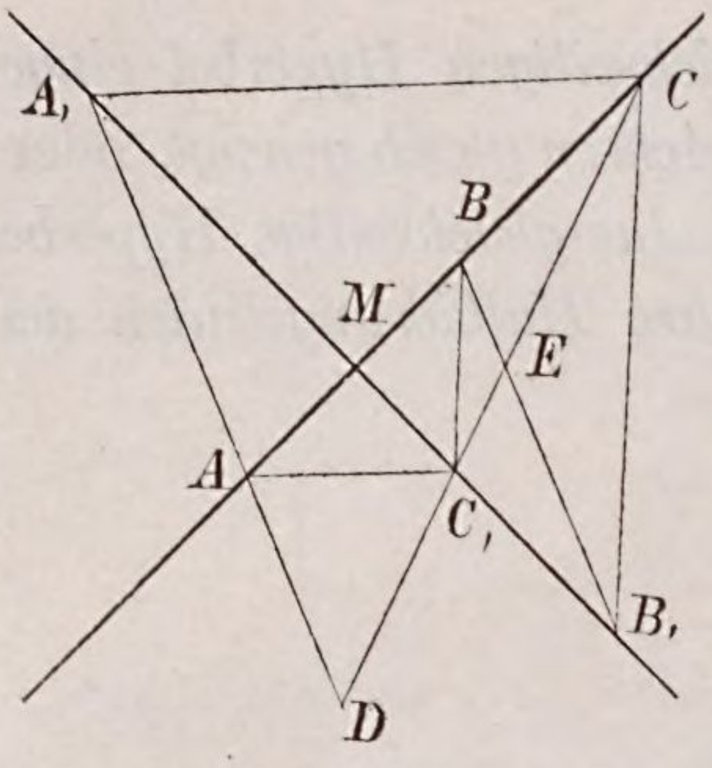

Fig. 10.

Schneidet man noch die parallelen Tangenten mit der Tangente CC_1 in D und E, so ist

$$DC_1 : DC = AC_1 : A_1C = AM : CM$$
$$EC_1 : EC = BC_1 : B_1C = BM : CM.$$

Da aber AA_1 und BB_1 parallele Tangenten sind, also

$$AM = BM$$

ist, so folgt:

$$DC_1 : DC = EC_1 : EC,$$

d. h. CC_1DE sind vier harmonische Punkte.

17. *Eine Asymptote und zwei Tangenten bestimmen zwei gleichseitige Hyperbeln.*

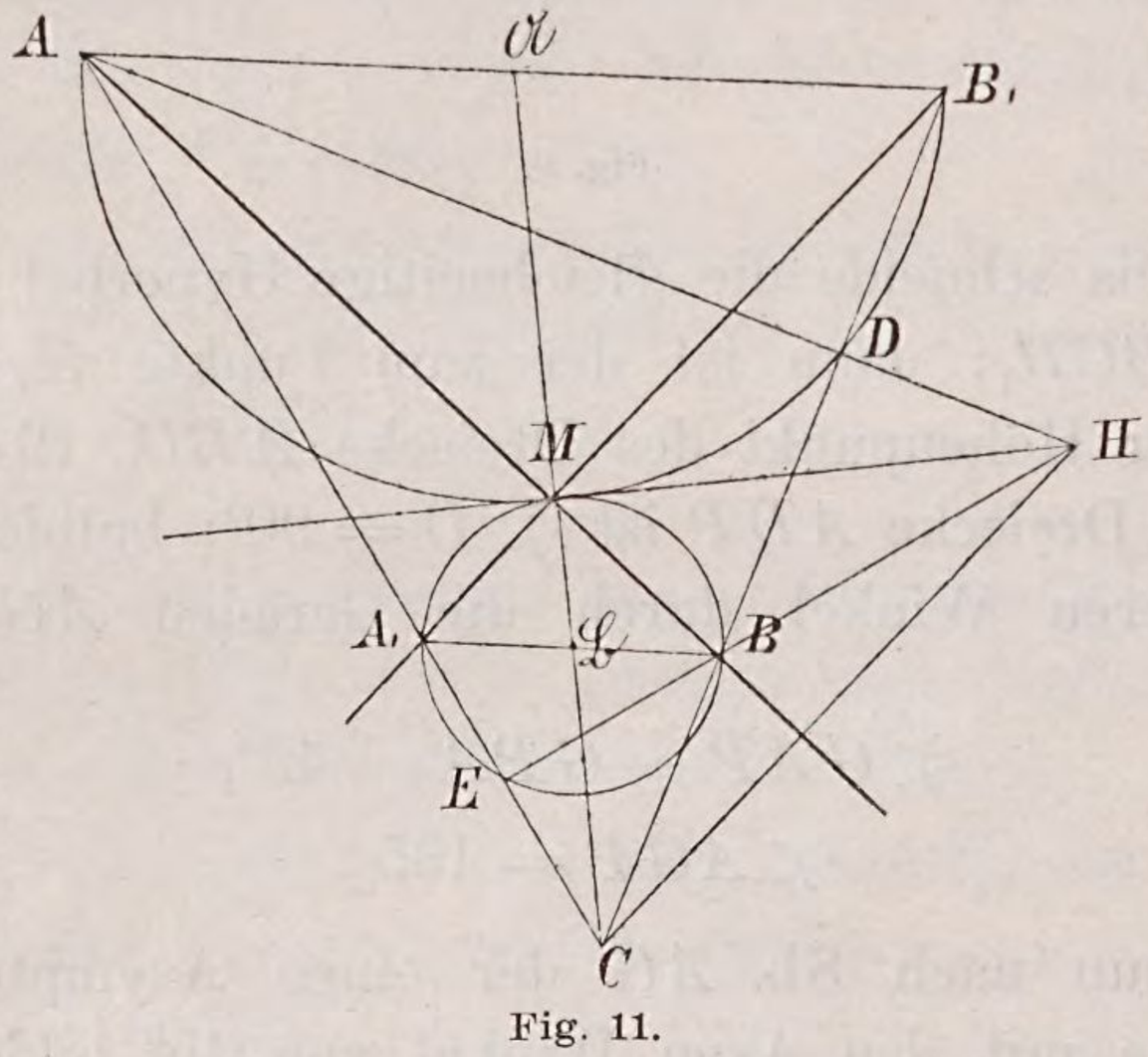

Fig. 11.

Die beiden Tangenten schneiden die Asymptoten in AA_1 und BB_1, es sind dann die Geraden AB_1 und A_1B parallel und die Gerade CM halbiert dieselben in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Um $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beschreibe man mit $\mathfrak{A}M$ und $\mathfrak{B}M$ Kreise,

so gehen diese durch die Punkte AB_1 und A_1B und berühren sich in M.

Von A und B fälle man AD und BE senkrecht auf BC und AC; ihr Schnittpunkt H ist der Höhenpunkt des Dreiecks ABC.

Durch die Punkte D und E müssen die vorher konstruierten Kreise gehen. — Weil das Viereck $ADBE$ ein Kreisviereck ist, so ist

$$HA \,.\, HD = HB \,.\, HE$$

also haben beide Kreise im Punkte H gleiche Potenzen und die gemeinschaftliche Tangente in M mufs durch H gehen. Deshalb ist auch

$$HM^2 = HA \,.\, HD.$$

Nimmt man also die Tangenten AC, BC und die Asymptote AB als gegeben, so kann man den Höhenpunkt H des Dreiecks ABC und die Strecke HM konstruieren. Beschreibt man mit dieser um H den Kreis, so schneidet er die gegebene Asymptote in zwei Punkten M und M', den Mittelpunkten zweier gleichseitigen Hyperbeln, welche AC und BC berühren und AB zur einen Asymptote haben.

18. *Beschreibt man über der Entfernung der Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise als Durchmesser einen Kreis, den Ähnlichkeitskreis, so gehört er dem durch jene bestimmten Büschel an.*

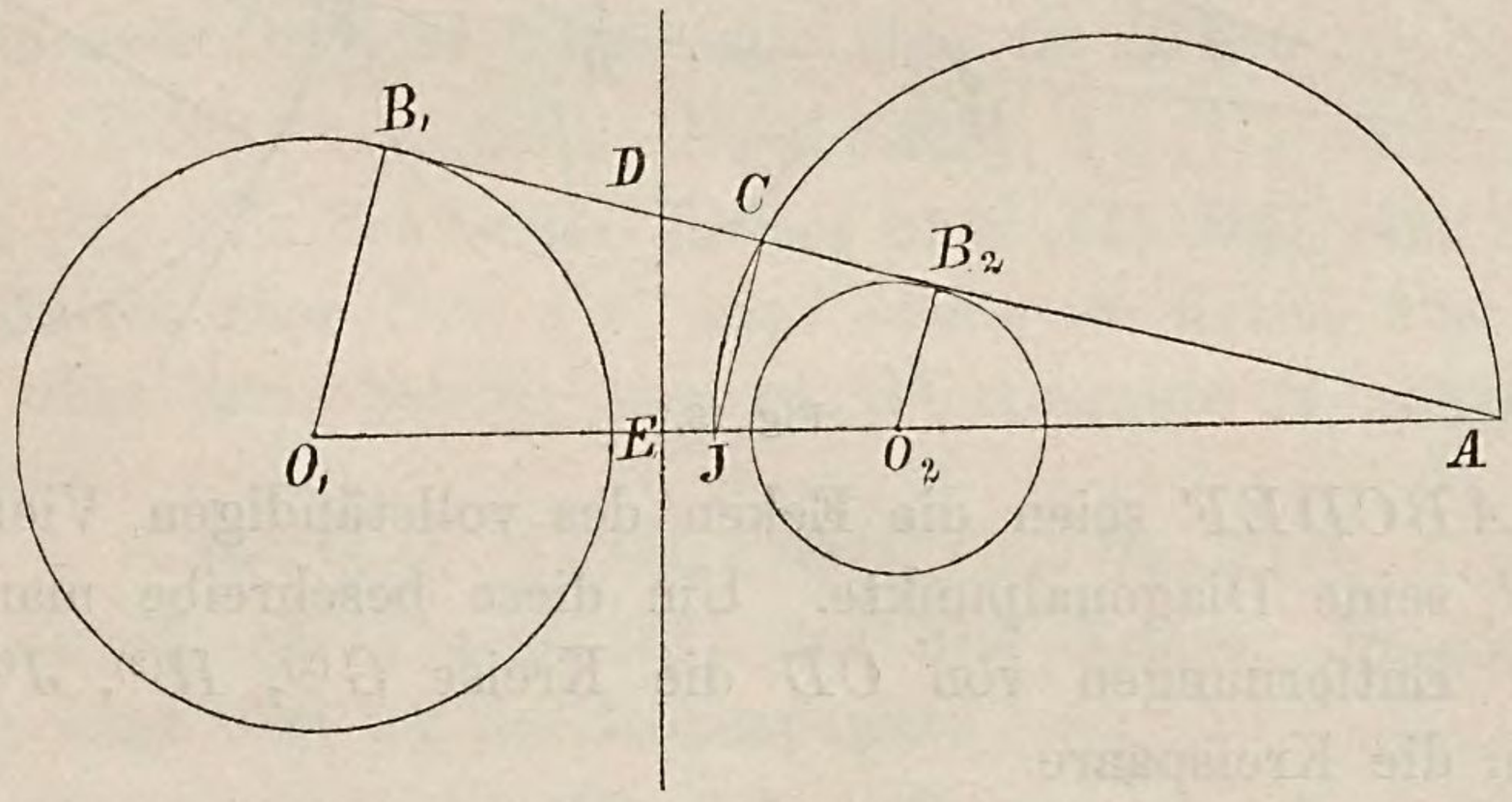

Fig. 12.

O_1 und O_2 seien die Mittelpunkte zweier Kreise, A und J ihre Ähnlichkeitspunkte. Über AJ als Durchmesser beschreibe

man einen Kreis $K^{(2)}$; dieser schneide die gemeinschaftliche Tangente $B_1 B_2$ in C. Da

$$O_1 B_1 \parallel JC \parallel O_2 B_2$$

ist und $O_1 O_2 AJ$ harmonische Punkte sind, so müssen auch $B_1 B_2 AC$ harmonisch sein. Ist D die Mitte von $B_1 B_2$, so ist

$$DB_1^{\,2} = DA \,.\, DC = DB_2^{\,2},$$

also ist D ein Potenzpunkt der drei Kreise $O_1^{(2)}$, $O_2^{(2)}$, $K^{(2)}$ und da ihre Mittelpunkte auf derselben Geraden liegen, so müssen sie die Senkrechte DE von D auf die Centrale zur Potenzlinie haben und bilden also ein Büschel.

19. *Der Gauſs-Bodenmillersche Satz.*

Die Kreise über den drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits gehören einem Büschel an; die Mitten der drei Diagonalen liegen also auf einer Geraden.

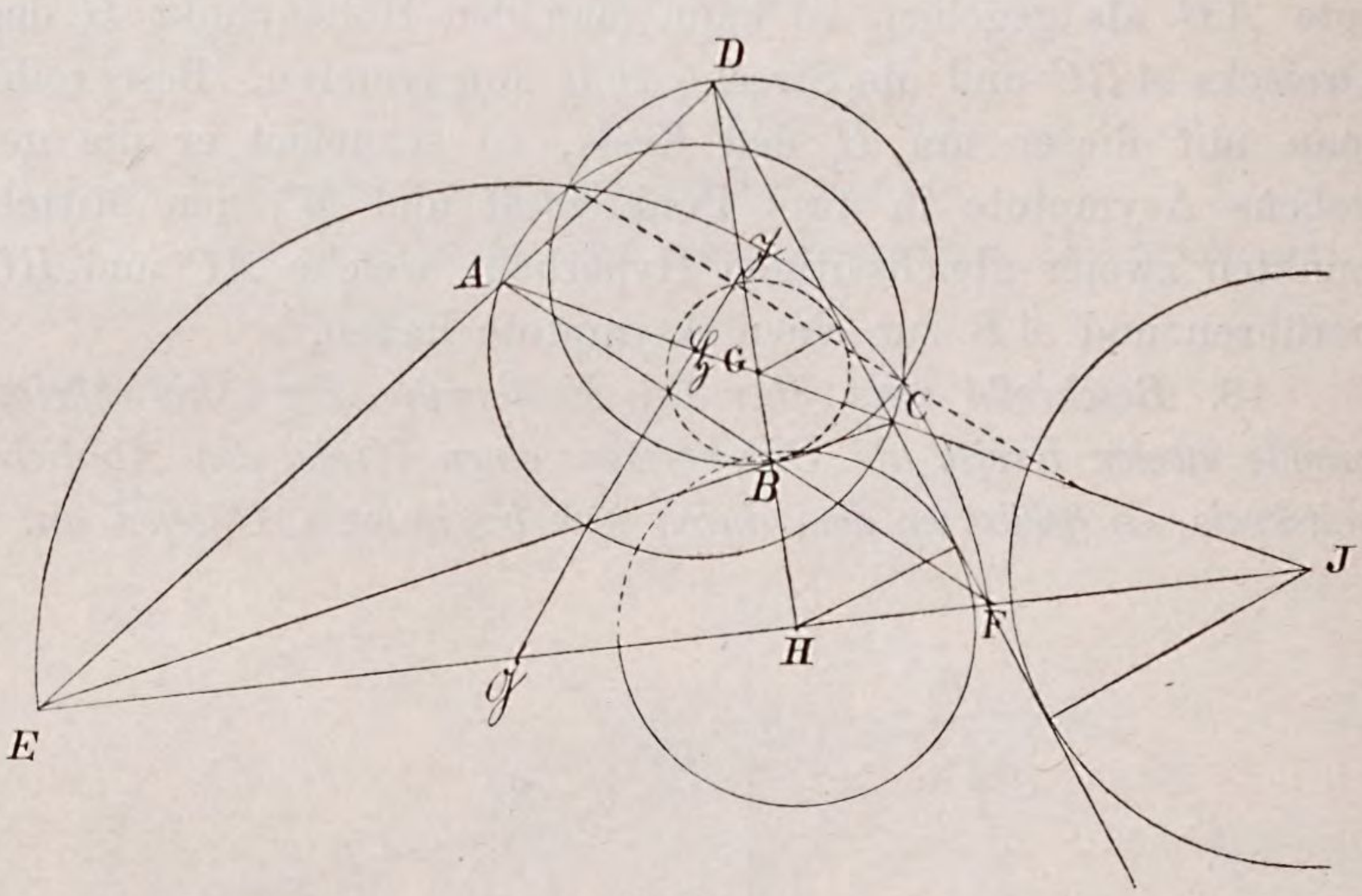

Fig. 13.

$ABCDEF$ seien die Ecken des vollständigen Vierseits, GHJ seine Diagonalpunkte. Um diese beschreibe man mit ihren Entfernungen von CD die Kreise $G^{(2)}$, $H^{(2)}$, $J^{(2)}$, so haben die Kreispaare

$$G^{(2)} H^{(2)}, \quad H^{(2)} J^{(2)}, \quad J^{(2)} G^{(2)}$$

die Paare von Ähnlichkeitspunkten

$$BD, \quad EF, \quad AC.$$

Um die Mitten

$$\mathfrak{J},\quad \mathfrak{G},\quad \mathfrak{H}$$

derselben beschreibe man über ihren Abständen die Kreise

$$\mathfrak{J}^{(2)},\quad \mathfrak{G}^{(2)},\quad \mathfrak{H}^{(2)},$$

so gehören sie bezüglich den Büscheln

$$(G^{(2)}H^{(2)}),\quad (H^{(2)}J^{(2)}),\quad (J^{(2)}G^{(2)})$$

nach dem vorigen Satze an und schneiden daher den Orthogonalkreis der drei Kreise $G^{(2)}H^{(2)}J^{(2)}$ rechtwinklig.

Sie schneiden aber auch den Kreis, welcher dem Dreiecke GHJ der Diagonalpunkte umgeschrieben ist, rechtwinklig; denn da

$$BDGH,\quad EFHJ,\quad ACGJ$$

je vier harmonische Punkte sind, so ist

$$\mathfrak{J}B^2 = \mathfrak{J}G\,.\,\mathfrak{J}H,\quad \mathfrak{G}F^2 = \mathfrak{G}H\,.\,\mathfrak{G}J,\quad \mathfrak{H}C^2 = \mathfrak{H}G\,.\,\mathfrak{H}J.$$

Alle Kreise aber, welche zwei andere rechtwinklig schneiden, gehören einem Büschel an; also gehören die drei Kreise

$$\mathfrak{J}^{(2)},\quad \mathfrak{G}^{(2)},\quad \mathfrak{H}^{(2)}$$

zu einem Büschel.

20. *Die Höhenpunkte der vier Dreiecke, welche die vier Seiten eines vollständigen Vierseits bilden, liegen auf der Potenzlinie derjenigen drei Kreise, welche man über den Diagonalen zeichnen kann und diese geht durch den Mittelpunkt des dem Diagonalendreiecke umgeschriebenen Kreises* (Fig. 14).

In dem Dreiecke CDF fälle man die Höhen

$$CC_1,\quad DD_1,\quad FF_1,$$

so ist CC_1 eine Sehne des Kreises über AC, DD_1 eine Sehne des Kreises über BD, FF_1 eine solche im Kreise über EF. Weil aber diese Sehnen sich im Höhenpunkte H_1 schneiden, so ist

$$CH_1\,.\,C_1H_1 = DH_1\,.\,D_1H_1 = FH_1\,.\,F_1H_1$$

also ist H_1 ein Potenzpunkt der drei Kreise. In gleicher Weise folgt dies für die Höhenpunkte

$$H_2,\quad H_3,\quad H_4$$

der Dreiecke

$$ADE,\quad BCE,\quad ABF$$

Da aber die drei Kreise nach dem vorigen Satze einem

Büschel angehören, welches von dem Kreise $O^{(2)}$ um das

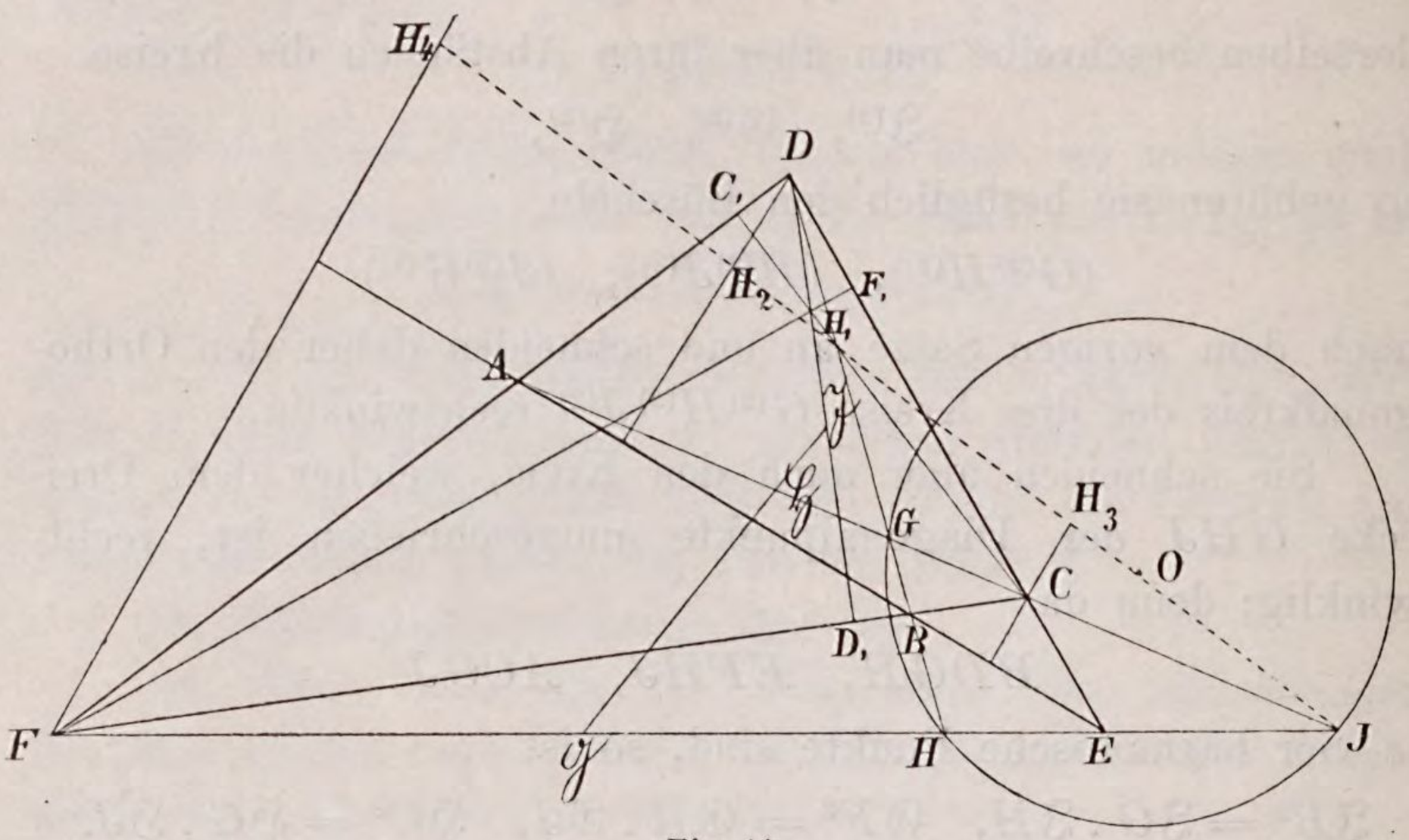

Fig. 14.

Dreieck GHJ rechtwinklig geschnitten wird, so liegen

$$OH_1H_2H_3H_4$$

in einer Geraden, der Potenzlinie jener drei Kreise.

21. a) *Derjenige Kreis um den Höhenpunkt eines der gleichseitigen Hyperbel umgeschriebenen Dreiecks, welcher den diesem Dreiecke umgeschriebenen Kreis rechtwinklig schneidet, geht durch den Mittelpunkt der Hyperbel.*

Das der Hyperbel umgeschriebene Dreieck sei ABC; seine Seiten werden von einer Asymptote in DEF geschnitten. Dadurch entsteht ein vollständiges Vierseit $ABCDEF$, dessen Diagonaldreieck PQR sei. Der Umkreis $O^{(2)}$ des letzteren habe den Mittelpunkt O.

Die Seiten des vollständigen Vierseits bilden vier Dreiecke, deren Höhenpunkte mit O in einer Geraden liegen.

Ebenso liegen die Halbierungspunkte $\mathfrak{A}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{C}$ der drei Diagonalen in einer Geraden $\mathfrak{g}$, welche den Kreis $O^{(2)}$ in K und L schneiden mag.

Es seien H und H_1 die Höhenpunkte der Dreiecke BDF und ABC. Dann steht OH auf KL senkrecht. Ist S der Schnittpunkt beider Geraden, so ist:

$$\mathfrak{A}S^2 - KS^2 = (\mathfrak{A}S + KS)\,(\mathfrak{A}S - KS) = \mathfrak{A}K \,.\, \mathfrak{A}L$$

also:

$$\mathfrak{A}S^2 = KS^2 + \mathfrak{A}K \,.\, \mathfrak{A}L.$$

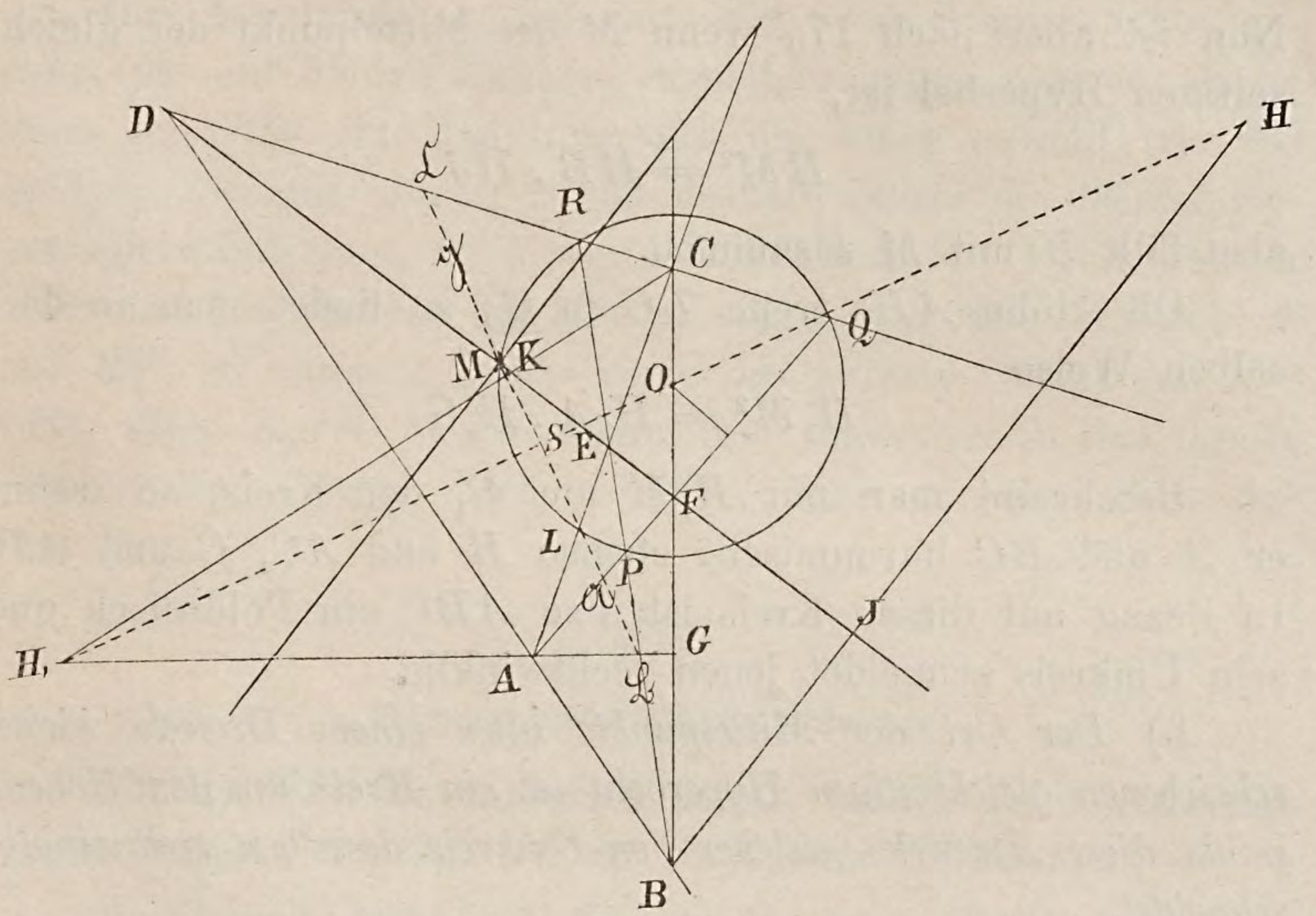

Fig. 15.

Aber es ist auch

$$\mathfrak{A}S^2 = \mathfrak{A}H^2 - HS^2$$

also:

$$HS^2 = \mathfrak{A}H^2 - KS^2 - \mathfrak{A}K \,.\, \mathfrak{A}L$$

und:

$$HK^2 = HS^2 + KS^2 = \mathfrak{A}H^2 - \mathfrak{A}K \,.\, \mathfrak{A}L = \mathfrak{A}H^2 - \mathfrak{A}P \,.\, \mathfrak{A}Q.$$

Da aber aus dem vollständigen Vierseit $ABCDEF$ sich ergiebt, dafs $AFPQ$ harmonische Punkte sind und

$$A\mathfrak{A} = F\mathfrak{A}$$

ist, so ist auch

$$A\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}P \,.\, \mathfrak{A}Q$$

und

$$HK^2 = \mathfrak{A}H^2 - A\mathfrak{A}^2. \quad \text{Ebenso: } HK^2 = \mathfrak{B}H^2 - \mathfrak{B}B^2.$$

Wenn man über BE als Durchmesser einen Kreis zeichnet, so geht er durch den Fufspunkt J der Höhe BH und die Potenz dieses Kreises im Punkte H ist $HB \,.\, HJ$. Da $\mathfrak{B}$ der Mittelpunkt und $\mathfrak{B}B$ der Radius dieses Kreises ist, so ist die Potenz desselben im Punkte H auch gleich $\mathfrak{B}H^2 - \mathfrak{B}B^2$ und es ist

$$HB \,.\, HJ = \mathfrak{B}H^2 - \mathfrak{B}B^2$$

also auch

$$HK^2 = HB \,.\, HJ.$$

Nun ist aber nach 17., wenn M der Mittelpunkt der gleichseitigen Hyperbel ist,

$$HM^2 = HB \,.\, HJ$$

also fällt K mit M zusammen.

Die Höhe AH_1 treffe BC in G, so findet man in derselben Weise

$$H_1M^2 = H_1A \,.\, H_1G.$$

Beschreibt man mit H_1M um H_1 den Kreis, so trennt er A und BC harmonisch, ebenso B und AC, C und AB. In Bezug auf diesen Kreis ist also ABC ein Poldreieck und sein Umkreis schneidet jenen rechtwinklig.

b) *Der Ort der Mittelpunkte aller einem Dreiecke eingeschriebenen gleichseitigen Hyperbeln ist ein Kreis um den Höhenpunkt dieses Dreiecks, welcher den Umkreis desselben rechtwinklig schneidet.*

Folgt aus a.

c) *Durch vier Tangenten sind zwei gleichseitige Hyperbeln bestimmt.*

Die vier Tangenten seien $abcd$. Man konstruiere die Höhenpunkte der Dreiseite abc und abd und um sie diejenigen Kreise, welche die Umkreise jener Dreiecke rechtwinklig schneiden. Sie treffen sich in den Mittelpunkten zweier gleichseitigen Hyperbeln, welche $abcd$ zu Tangenten haben.

22. *Zwei gleichseitige Hyperbeln haben mindestens zwei reelle Schnittpunkte.*

$H^{(2)}$ und $H_1^{(2)}$ seien zwei gleichseitige Hyperbeln, aa' und a_1a_1' ihre Asymptoten. Sind U und U' die unendlich fernen Punkte auf a und a' und ist u derjenige Teil der unendlich fernen Geraden, der innerhalb $H^{(2)}$ liegt, von dessen Punkten sich also keine Tangenten an $H^{(2)}$ ziehen lassen, so mufs derselbe stets von einer der beiden Asymptoten a_1a_1' geschnitten werden. Er werde von a_1 in U_1 geschnitten; der Schnittpunkt U_1' von g_∞ mit a_1' mufs aufserhalb der Hyperbel $H^{(2)}$ liegen. Weil nun U_1 und U_1' die unendlich fernen

Punkte der Hyperbel $H_1^{(2)}$ sind, so liegt diese teils innerhalb, teils aufserhalb $H^{(2)}$.

Die Asymptote a_1 hat mit $H^{(2)}$ zwei Schnittpunkte gemein, die auf beiden Zweigen derselben liegen müssen; daher liegt von $H_1^{(2)}$ ein Teil innerhalb des einen sowohl wie des anderen Zweiges von $H^{(2)}$ und deshalb haben die beiden Hyperbeln mindestens zwei reelle Schnittpunkte. Denn bewegt sich aus dem Inneren des einen Zweiges von $H^{(2)}$ ein Punkt P auf $H_1^{(2)}$, so mufs er, bevor er in das äufsere Gebiet von $H^{(2)}$ tritt, diese Kurve überschreiten und, bevor er in das innere Gebiet des anderen Zweiges tritt, mufs er dies noch einmal thun.

§ 2.

Konjugierte Durchmesser.

23. a) Zwei Durchmesser, deren Winkel von den Asymptoten halbiert werden, heifsen *konjugierte Durchmesser.*

b) *Deshalb kann von zwei konjugierten Durchmessern nur einer die Hyperbel schneiden.*

c) Die Richtung einer Geraden, die einem von zwei konjugierten Durchmessern parallel ist, heifst dem anderen konjugiert.

d) Die *Achsen* sind zwei konjugierte Durchmesser. Eine von ihnen schneidet die Hyperbel in ihren *Scheiteln.* Der Kreis, welcher die Hyperbel in den Scheiteln berührt, heifst der *Scheitelkreis;* die Tangenten in den Scheiteln heifsen *Scheiteltangenten.*

24. a) *Jeder von zwei konjugierten Durchmessern halbiert die dem anderen parallelen Sehnen.*

d und d_1 seien zwei konjugierte Durchmesser, also aa_1dd_1 harmonische Strahlen. Eine parallele Sehne BB_1 zu d schneide die Asymptoten in A und A_1 und den konjugierten Durchmesser in D_1. Aus den Eigenschaften der harmonischen Strahlen folgt zunächst (Fig. 16)

$$AD_1 = A_1D_1$$

und aus 3.

$$BD_1 = B_1D_1.$$

b) *Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser parallel.*

Folgt aus a.

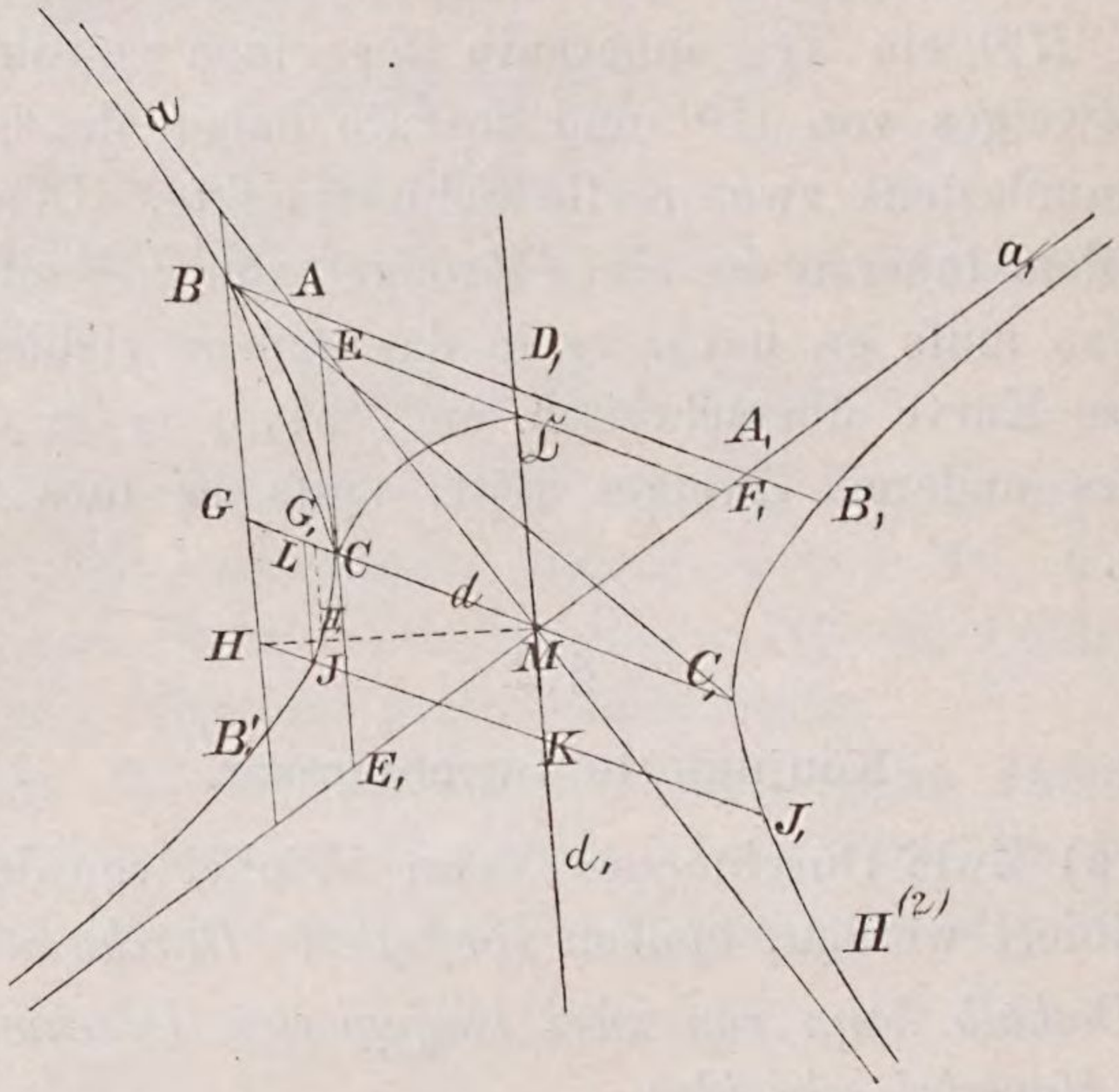

Fig. 16.

c) *Irgend zwei parallele Tangenten einer gleichseitigen Hyperbel berühren beide Zweige derselben.*

d) *Irgend zwei Durchmesser bilden denselben Winkel, wie ihre konjugierten Durchmesser.*

e) *Die Sehnen, welche einen Hyperbelpunkt mit den Endpunkten eines Durchmessers verbinden, sind zwei konjugierten Durchmessern parallel.*

Denn die Halbierungslinien ihrer Winkel sind nach 8b. den Asymptoten parallel.

25. *Die konjugierte Hyperbel.*

a) Dreht man eine gleichseitige Hyperbel $H^{(2)}$ um ihren Mittelpunkt, so dafs die Asymptoten ihre Lage vertauschen, also um einen Winkel von 90^0, so erhält man die *konjugierte Hyperbel* $\mathfrak{H}^{(2)}$.

b) *Zwei konjugierte Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel sind auch konjugiert für die konjugierte Hyperbel.*

Denn beide Hyperbeln haben dieselben Asymptoten.

c) *Von zwei konjugierten Durchmessern schneidet der eine die Hyperbel, der andere die konjugierte Hyperbel.*

d) Unter der *Gröfse eines Durchmessers* der gleichseitigen Hyperbel, der dieselbe nicht schneidet, versteht man diejenige Strecke, welche auf ihm von der konjugierten Hyperbel begrenzt wird.

e) *Zwei konjugierte Durchmesser haben dieselbe Gröfse.*

Die Tangente in C an $H^{(2)}$ schneide die Asymptoten a und a_1 in E und E_1; zieht man $EF_1 \parallel CC_1$, so ist

$$\triangle EME_1 \cong EMF_1,$$

also ist nach 5a. EF_1 eine Tangente der konjugierten Hyperbel und weil

$$E\mathfrak{C} = \mathfrak{C}F_1,$$

so ist $\mathfrak{C}$ ihr Berührungspunkt. Da aber $CM\mathfrak{C}E$ ein Rhombus ist, so hat man auch

$$MC = M\mathfrak{C}.$$

Es begrenzen also beide Hyperbeln $H^{(2)}$ und $\mathfrak{H}^{(2)}$ auf den konjugierten Durchmessern d und d_1 gleiche Strecken.

26. *Jede Sehne teilt den ihrer Richtung konjugierten Durchmesser in solche Abschnitte, dafs ihre Hälfte zwischen denselben die mittlere Proportionale ist.*

Der Durchmesser d halbiert die zu d_1 parallele Sehne BB' in G.

Die Sehne BC erscheint den Punkten C und C_1 unter gleichen Winkeln; als Winkel, unter dem sie dem Punkte C erscheint, mufs derjenige Winkel angesehen werden, den sie mit der Tangente CE bildet, also ist

$$\measuredangle GBC = BCE = BC_1G.$$

(Dies folgt übrigens auch aus 24d. und e.) Also ist:

$$\triangle BCG \sim \triangle BC_1G$$

und es verhält sich:

$$CG : BG = BG : C_1G.$$

27. a) *Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf zwei konjugierte Durchmesser.*

Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Hyperbel Parallelen zu zwei konjugierten Durchmessern, so nennt man

die Strecken zwischen dem Punkte und diesen Durchmessern die *Coordinaten* des Punktes in Bezug auf diese Durchmesser und bezeichnet sie mit x und y.

Für den Punkt B sind

$$BD_1 = MG = x \text{ und } BG = y$$

die Coordinaten. Setzt man $CM = d$, so folgt aus 26.

$$x - d : y = y : x + d$$

oder in bekannter Form:

$$x^2 - y^2 = d^2.$$

b) *Jede Ordinate zur Hauptachse ist die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten, in welche sie die Hauptachse zerlegt.*

Folgt aus a.

c) *Zwei Sehnen, die zwei konjugierten Durchmessern parallel sind, teilen sich in Abschnitte von gleichem Produkte.*

Die Sehnen BB' und JJ_1, welche zu d_1 und d parallel sind, schneiden sich in H. Nach a. ist, wenn $JL \parallel BB'$,

$$d^2 = GM^2 - BG^2 = ML^2 - JL^2 = ML^2 - GH^2,$$

also auch

$$GM^2 - ML^2 = BG^2 - GH^2$$

oder

$$(GM + ML)(GM - ML) = (BG + GH)(BG - GH)$$

und schliefslich:

$$HJ_1 . HJ = HB . HB'$$

d) *Wenn sich zwei Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel schneiden, so verhalten sich die Rechtecke aus ihren Abschnitten, wie die Quadrate der parallelen Halbmesser.* (Fig. 16.)

Durch den Punkt H von BB' ziehe man den Radius HM, welcher die Hyperbel in H_1 trifft und durch H_1 die Parallele H_1G_1 zu HG. Dann ist:

$$BG^2 = GC . GC_1 = (GM - CM)(GM + CM) = GM^2 - CM^2$$

$$G_1H_1^2 = G_1M^2 - CM^2$$

$$BH . B'H = (BG + GH)(BG - GH) = BG^2 - GH^2$$

und wegen der ersten Gleichung

$$BG^2 - GH^2 = GM^2 - CM^2 - GH^2.$$

Aus ähnlichen Dreiecken folgt:

$$GM : GH : HM = G_1M : G_1H_1 : H_1M$$

und hieraus:

$$GM^2 - GH^2 : G_1M^2 - G_1H_1{}^2 = HM^2 : H_1M^2$$

also auch wegen a.:

$$GM^2 - GH^2 = CM^2 \cdot \frac{HM^2}{H_1M^2}.$$

Aber:

$$GM^2 - GH^2 = BG^2 - GH^2 + CM^2 = BH \,.\, B'H + CM^2,$$

also durch Einsetzen in die letzte Gleichung

$$BH \,.\, B'H = CM^2 \left(\frac{HM^2}{H_1M^2} - 1\right).$$

Zieht man durch H eine zweite Sehne B_1B_1', zu welcher der konjugierte oder der ihm gleiche parallele Halbmesser $C'M$ ist, so hat man auch:

$$B_1H \,.\, B_1'H = C'M^2 \left(\frac{HM^2}{H_1M^2} - 1\right)$$

also endlich:

$$\frac{BH \,.\, B'H}{B_1H \,.\, B_1'H} = \frac{CM^2}{C'M^2}.$$

28. *In jedem, einer gleichseitigen Hyperbel umgeschriebenen Parallelogramme sind die Diagonalen konjugierte Durchmesser.*

Denn sie werden wegen 16. durch die Asymptoten harmonisch geteilt und weil diese auf einander senkrecht stehen, so werden die Diagonalenwinkel durch die Asymptoten halbiert.

§ 3.

Die Brennpunkte.

29. a) *Legt man durch die Schnittpunkte einer Tangente mit den Asymptoten einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Nebenachse liegt, so schneidet er die Hauptachse in zwei festen Punkten, den Brennpunkten der gleichseitigen Hyperbel.*

Eine Tangente t schneide die Asymptoten in C und C_1; macht man (Fig. 17)

$$MD = MC_1, \quad MD_1 = MC$$

so ist auch DD_1 eine Tangente und weil

$$MC \,.\, MD = MC_1 \,.\, MD_1,$$

so liegen die vier Punkte CC_1DD_1 auf einem Kreise $O^{(2)}$, dessen Mittelpunkt O auf der Nebenachse liegt. Dieser schneidet die Hauptachse in den festen Punkten B und B_1 weil

$$MB^2 = MC \,.\, MC_1 = MB_1{}^2 = 4q^2 = c^2 \text{ (cf. 5a. 1.)}$$

konstant ist, wie auch die Tangente t sich ändert. Die Punkte B und B_1 sind die *Brennpunkte* der gleichseitigen Hyperbel; $MB = c$ ist ihre *lineare Excentricität.*

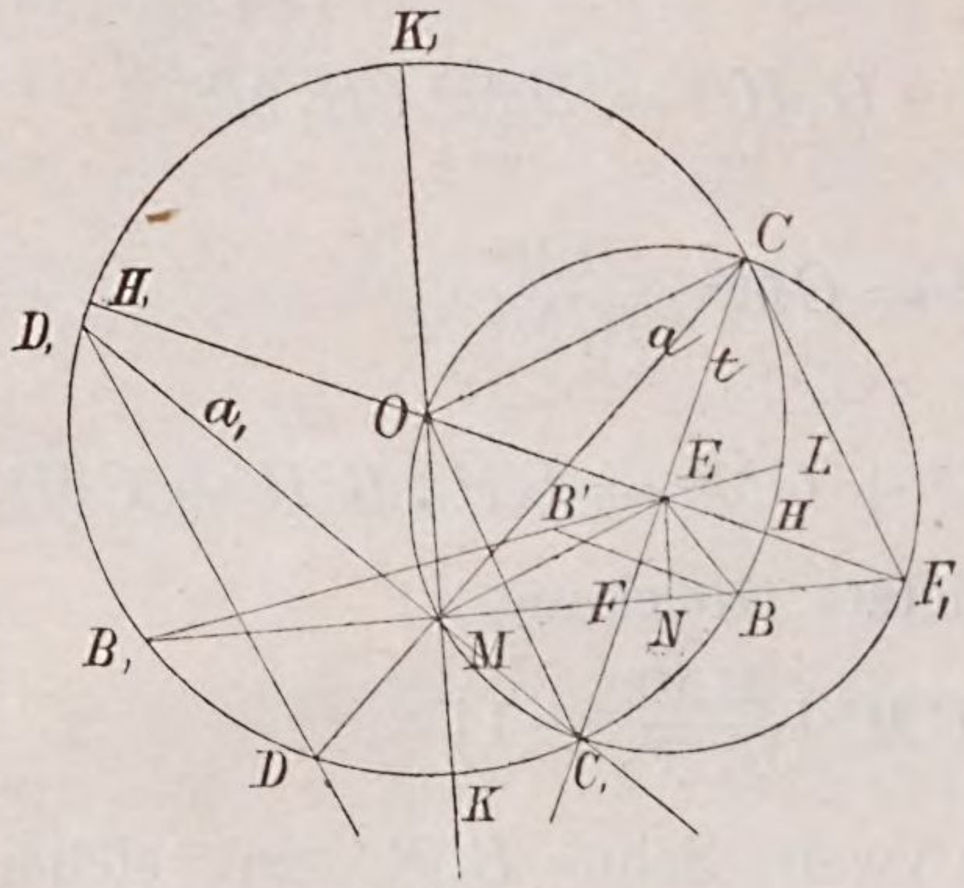

Fig. 17.

b) *In einer gleichseitigen Hyperbel ist das Quadrat der linearen Excentricität gleich dem halben Quadrate der Hauptachse.*

Wenn die Tangente t Scheiteltangente wird, so wird auch

$$MC = MC_1 = c$$

und wenn man die Hauptachse

$$AA_1 = 2a$$

setzt, so folgt:

$$c^2 = 2a^2 = \tfrac{1}{2}(2a)^2.$$

30. *Die Tangente in einem Punkte der gleichseitigen Hyperbel bildet mit seinen Brennpunktsstrahlen gleiche Winkel.*

Man ziehe durch O den zur Tangente t senkrechten Durchmesser HH_1, welcher CC_1 in der Mitte E, also in einem Punkte der gleichseitigen Hyperbel und BB_1 in F_1 trifft.

Da die Bogen CD_1 und C_1D zusammen 180^0 betragen und die Bogen CC_1 und DD_1 einander gleich sind, so beträgt jeder 90^0 und das Viereck COC_1M ist ein Kreisviereck. Der Umkreis desselben hat E zum Mittelpunkte und geht daher durch F_1. Deshalb ist

$$\sphericalangle MC_1F = MF_1C,$$

und weil

$$\sphericalangle C_1MF = CMF_1 = 45^0,$$

so ist

$$\triangle MC_1F \sim MCF_1$$

und

$$MC_1 : MF = MF_1 : MC$$

$$MF \,.\, MF_1 = MC \cdot MC_1 = MB^2$$

d. h. die Punkte und Strahlen

$$BB_1FF_1 \text{ und } E(BB_1FF_1)$$

sind harmonisch und weil

$$\sphericalangle FEF_1 = 90^0,$$

so ist:

$$\sphericalangle FEB = FEB_1.$$

31. *Das Rechteck aus den Brennpunktsstrahlen eines Hyperbelpunktes ist gleich dem Quadrate seines Halbmessers.* (Fig. 17.)

In dem harmonischen Büschel $E(BB_1FF_1)$ steht EF auf EF_1 senkrecht, also halbiert EF_1 den Winkel BEL und daher ist

$$\text{Bog. } BH = LH$$

$$BE = LE.$$

Da ferner:

$$ME^2 = CE^2 = B_1E \,.\, LE$$

so ist auch:

$$ME^2 = BE \,.\, B_1E.$$

32. *Die Differenz der Brennpunktsstrahlen eines Hyperbelpunktes ist gleich der Hauptachse.*

Man fälle EN senkrecht auf BB_1, setze

$$MN = x, \quad EN = y$$

so ist:

$$B_1E^2 = (c + x)^2 + y^2$$

$$BE^2 = (c - x)^2 + y^2$$

$$2\,BE \,.\, B_1E = 2\,ME^2 = 2\,x^2 + 2\,y^2.$$

Subtrahiert man die letzte Gleichung von der Summe der beiden ersten, so erhält man:

$$(B_1E - BE)^2 = 2\,c^2 = 4\,a^2$$

$$B_1E - BE = 2\,a.$$

33. *Die Gegenpunkte eines Brennpunktes in Bezug auf die Tangenten liegen auf einem Kreise um den anderen Brennpunkt, welcher die Hauptachse zum Radius hat.*

Macht man (Fig. 17.)

$$EB = EB'$$

so ist B' der Gegenpunkt von B, weil

$$BB' \perp EF$$

steht und da (32)

$$B_1B' = 2a$$

ist, so liegt B' auf dem Kreise um B_1 mit $2a$.

34. a) *Die Strahlen eines Brennpunktes nach den Berührungspunkten zweier Tangenten bilden einen Winkel, welcher durch den Brennpunktsstrahl nach dem Schnittpunkte der Tangenten halbiert wird.*

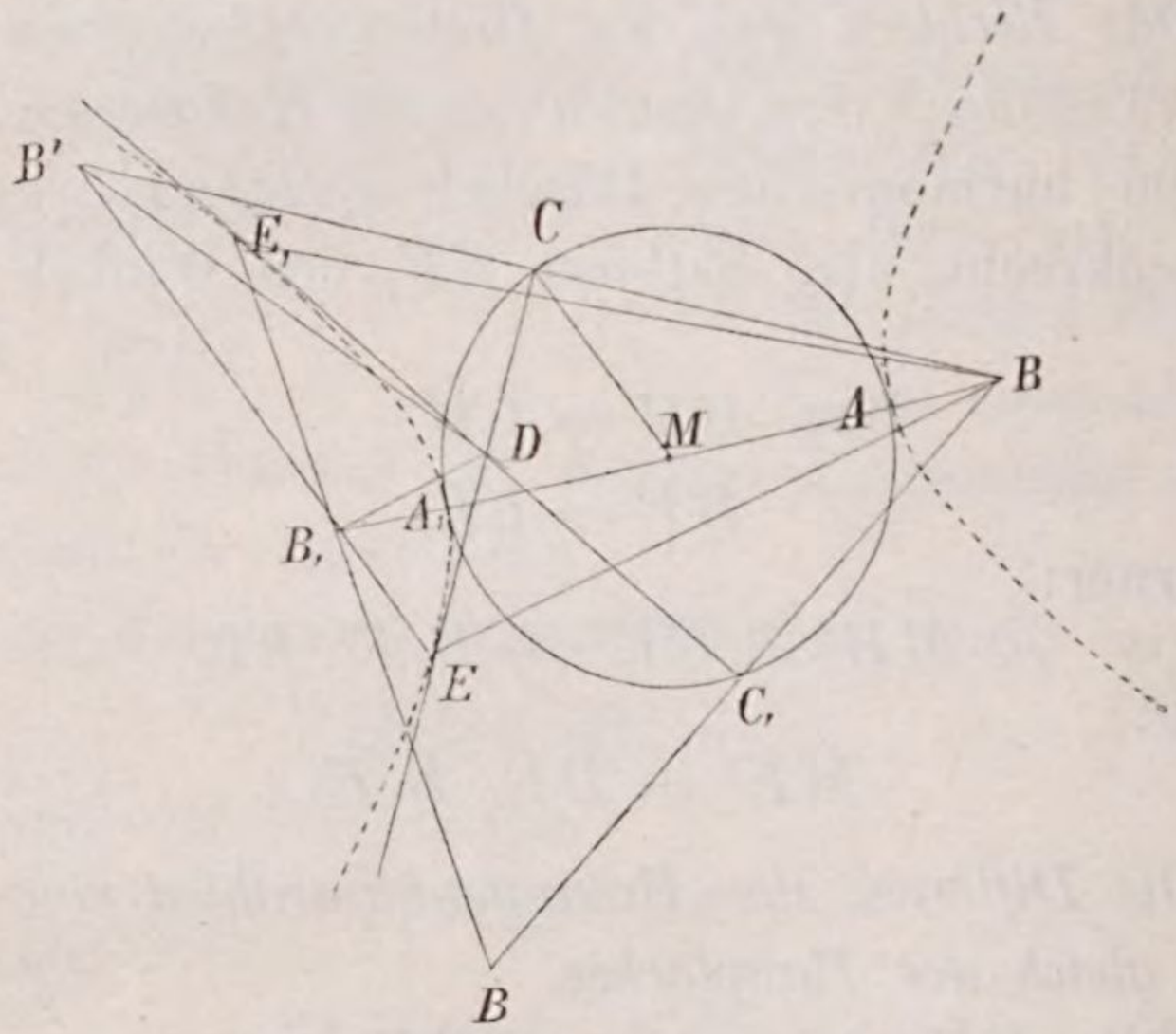

Fig. 18.

Es seien E, E_1, D die Berührungspunkte und der Schnittpunkt zweier Tangenten. Man konstruiere die Gegenpunkte B' und B_1' von B bezüglich dieser Tangenten, so müssen $B_1E_1B_1'$ und B_1EB' je in einer Geraden liegen (cf. Fig. 17) und es ist

$$DB' = DB_1' = DB$$
$$B_1B' = B_1B_1' = 2a$$

also

$$\triangle DB_1B' \simeq DB_1B_1'$$
$$\sphericalangle DB_1B' = DB_1B_1'.$$

In gleicher Weise folgt:

$$\sphericalangle EBD = E_1BD.$$

b) *Der Schnittpunkt der Tangenten in den Endpunkten einer Brennpunktssehne, liegt senkrecht über dem Brennpunkte.*

Folgt aus a.

35. *Die Fußspunkte der Senkrechten aus den Brennpunkten auf die Tangenten liegen auf dem Kreise über der Hauptachse; er heißt der Scheitelkreis.*

Die Fußspunkte der Senkrechten aus dem Brennpunkte B auf die Tangenten DE und DE_1 seien C und C_1. Da C die Mitte von BB' ist, so ist

$$MC \parallel B_1B'$$
$$MC = \tfrac{1}{2} B_1B' = a \quad (33.)$$

also liegen alle Fußspunkte auf dem mit a um M beschriebenen Kreise.

36. a) *Die Schnittpunkte der Tangenten in den Endpunkten einer Brennpunktssehne liegen auf einer festen Geraden.*

Diese Gerade heißt die *Leitlinie* desjenigen Brennpunktes, durch welchen die Sehne geht.

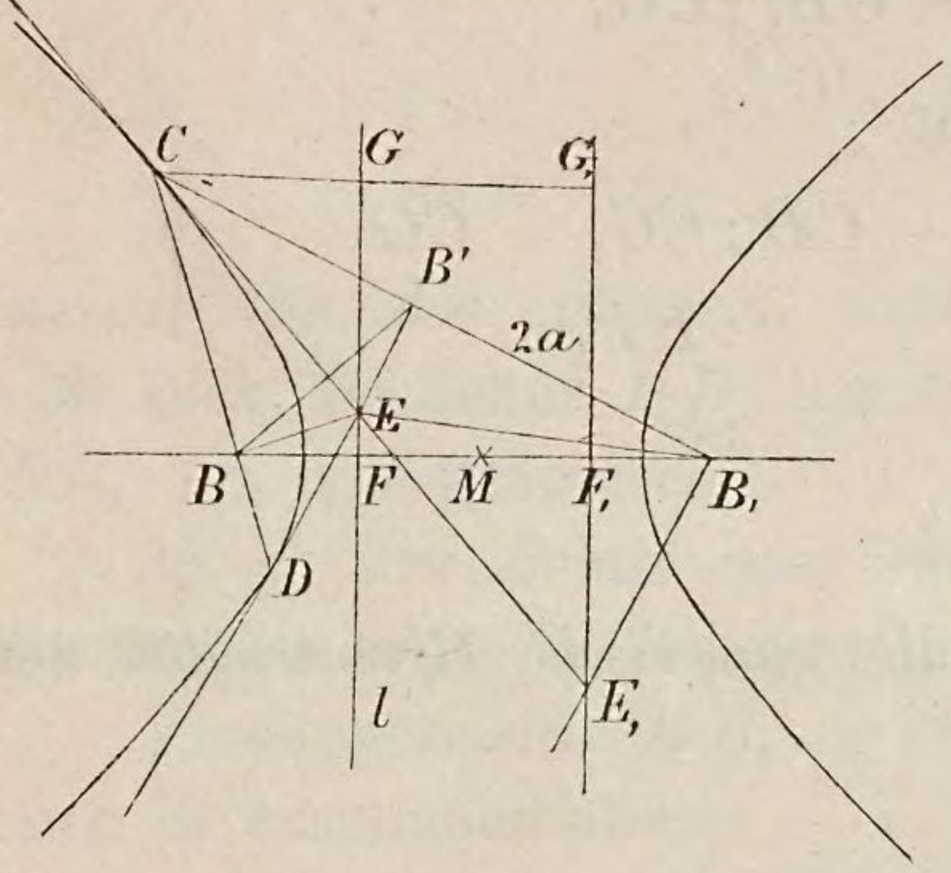

Fig. 19.

Durch den Brennpunkt B sei CD eine beliebige Sehne; die Tangenten in den Endpunkten C und D schneiden sich in E.

Ist B' der Gegenpunkt von B, bezüglich CE, so liegen $B_1B'C$ in einer Geraden (30.) und es ist (32.)

$$B_1B' = 2a$$
$$EB' = EB$$

und

$$EB' \perp B_1C$$

und daher

$$B_1E^2 - B'E^2 = B_1E^2 - BE^2 = 4a^2.$$

Mithin liegt E auf derjenigen zur Hauptachse senkrechten Geraden l, für welche die Differenz der Quadrate ihrer Entfernungen von den Brennpunkten gleich $4a^2$ ist.

b) *Die Leitlinie eines Brennpunktes einer gleichseitigen Hyperbel halbiert die Strecke zwischen ihm und dem Mittelpunkte.*

Die Leitlinie l treffe die Hauptachse in F, dann ist

$$B_1E^2 - BE^2 = B_1F^2 - BF^2 = 4a^2$$
$$B_1F^2 - BF^2 = (B_1F + BF)(B_1F - BF)$$
$$= 2c \,.\, 2MF = 4a^2 = 2c^2$$

also:

$$MF = \frac{c}{2}.$$

c) *Das Verhältnis der Abstände eines Punktes der gleichseitigen Hyperbel von einem Brennpunkte und seiner Leitlinie ist konstant und gleich* $\sqrt{2}$.

Die Tangente CE verlängere man, bis sie die zweite Leitlinie in E_1 trifft und fälle von C auf die Leitlinien die Senkrechten CG und CG_1. — Es ist (34b. 36a.)

$$\sphericalangle C B_1 E_1 = 90^0,$$

also:

$$CB' : CB_1 = CE : CE_1 = CG : CG_1$$

und daher

$$CB : CG = CB_1 : CG_1$$

und mit bekannter Umformung

$$\begin{aligned} CB : CG &= CB_1 - CB : CG_1 - CG \\ &= 2a \quad\quad : FF_1 \\ &= 2a \quad\quad : c \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dieses Verhältnis heifst die *numerische Excentricität* der gleichseitigen Hyperbel.

§ 4.

Die Polareigenschaften.

37. *Alle Punkte, welche einen festen Punkt von der gleichseitigen Hyperbel harmonisch trennen, liegen auf einer Geraden, welche zu dem Durchmesser des Punktes konjugiert ist.*

Der Punkt und die Gerade heifsen *Pol* und *Polare*.

Durch einen Punkt P des Durchmessers AA_1 ziehe man eine beliebige Hyperbelsehne BB_1. Dann ist

$$\sphericalangle BAB_1 + BA_1B_1 = 180^0 \ (8a),$$

also auch die Summe der Nebenwinkel

$$\sphericalangle CAD + CA_1D = 180^0$$

ACA_1D ein Kreisviereck.

In diesem sind die Halbierungslinien EE_1 und FF_1 der Winkel AQD und AB_1D parallel.*)

FF_1 ist nach 8 b. einer Asymptote parallel, also auch EE_1 und deshalb mufs CD dem zu AA_1 konjugierten Durchmesser parallel sein. (23).

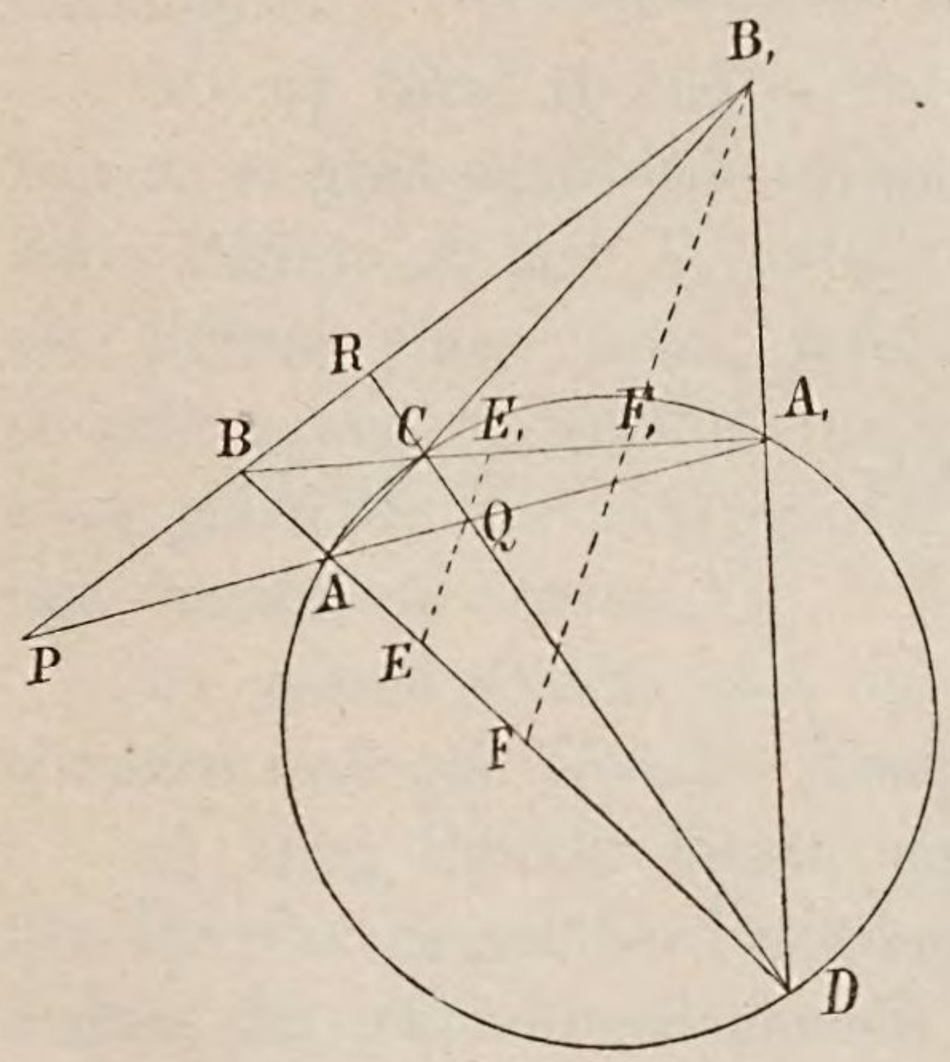

Fig. 20.

Aus den Eigenschaften des vollständigen Vierseits folgt, dafs

$PQAA_1$ und $PRBB_1$

harmonisch sind. Die Gerade CD ist also eine durch den Punkt P fest bestimmte Gerade, welche durch den zu P in Bezug auf AA_1 zugeordneten harmonischen Punkt parallel dem konjugierten Durchmesser von AA_1 gezogen wird. Man erhält sie stets, wie sich auch die Sehne BB_1 um P dreht; immer aber trennt sie BB_1 von P harmonisch.

38. a) *Die Polare eines ausserhalb der Hyperbel gelegenen Punktes ist seine Berührungssehne.*

Vereinigen sich BB_1 in einem Punkte, so mufs mit ihm auch R zusammenfallen.

b) *Die Polare eines Hyperbelpunktes ist seine Tangente.*

Fällt P mit A zusammen, so thut dies auch Q; die Tangente durch A ist aber dem Durchmesser AA_1 konjugiert.

c) *Die Polare des Mittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade.*

---

*) *Diejenigen Geraden, welche die von den Gegenseiten eines Kreisvierecks gebildeten Winkel halbieren, sind paarweise parallel.*

EE_1 und FF_1 seien zwei Gerade, welche die Winkel AQD und AB_1D halbieren.

$\sphericalangle DAA_1 = DCA_1$, $\sphericalangle AQE = CQE_1$, also $\sphericalangle AEQ = CE_1Q$
$\sphericalangle DAC = CA_1B_1$, $\sphericalangle AB_1F = DB_1F_1$, also $\sphericalangle AFB_1 = CF_1F$.

Hieraus folgt:

$$BE = BE_1, \quad BF = BF_1$$
$$EE_1 \parallel FF_1.$$

Diese ist die Verbindungslinie der Berührungspunkte auf den Asymptoten.

39. *Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden und umgekehrt.*

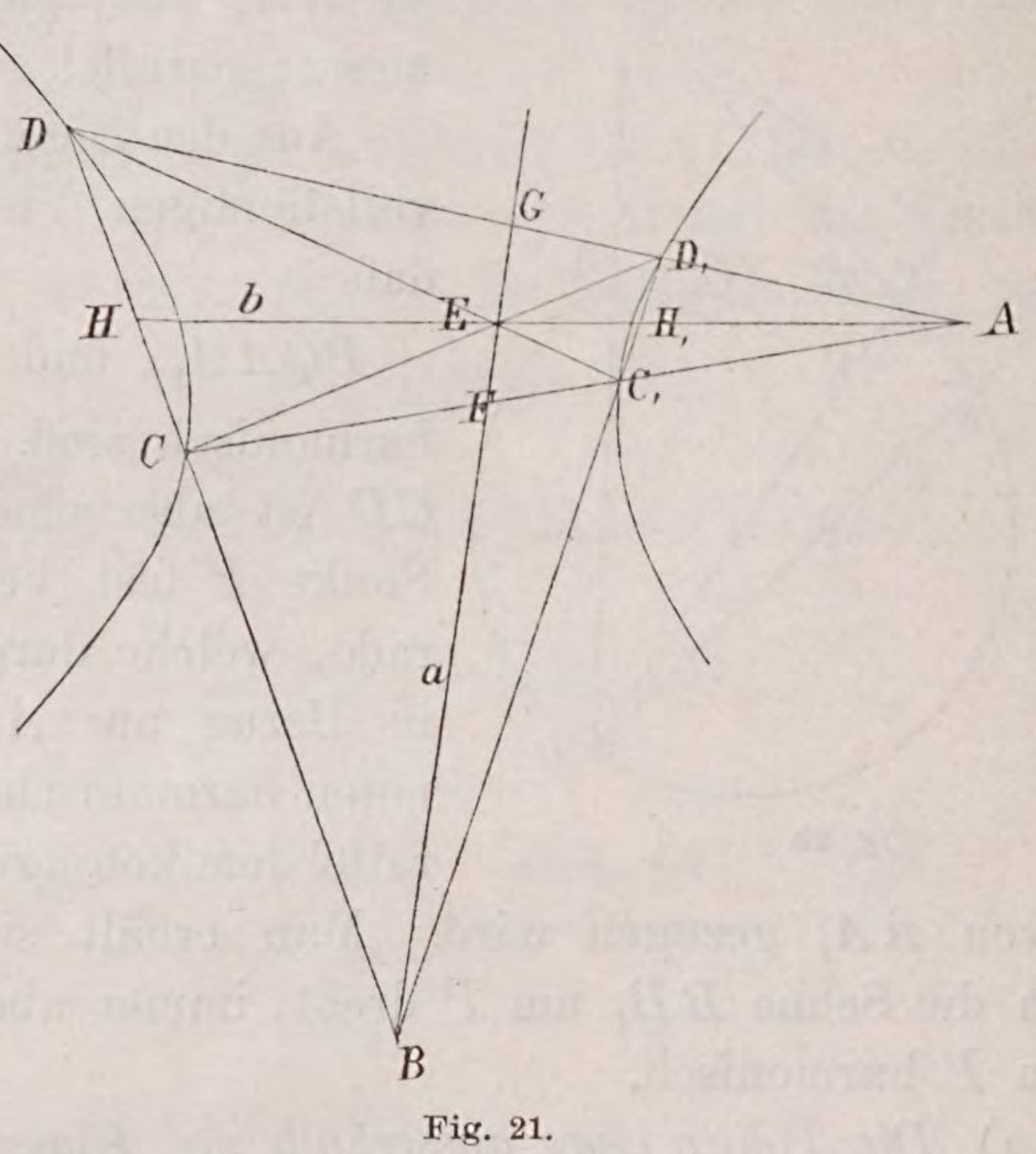

Fig. 21.

A und a seien Pole und Polare; auf a sei B ein beliebiger Punkt. Es wird behauptet, dafs seine Polare b durch A geht.

Durch B ziehe man eine beliebige Sehne CD und schneide mit AC und AD die Hyperbel in C_1 und D_1, die Polare a in F und G, so sind harmonisch

$$AGDD_1 \quad \text{und} \quad AFCC_1,$$

also auch

$$B(AGDD) \quad \text{und} \quad B(AFCC_1)$$

und weil

$$BA \text{ und } BA, \quad BG \text{ und } BF, \quad BC \text{ und } BD$$

zusammenfallen, so thun dies auch

$$BC_1 \quad \text{und} \quad BD_1.$$

In dem vollständigen Vierseit $AECDC_1D_1$ schneide man die Diagonalen CD und C_1D_1 mit AE in H und H_1, so sind harmonisch

$$CDBH \text{ und } C_1 D_1 B H_1,$$

also ist AE die Polare von B; denn sie trennt B von den Punktpaaren CD und $C_1 D_1$, also von der Hyperbel (37) harmonisch.

40. a) Sind A und a Pol und Polare, ist B ein Punkt von a, so geht nach dem vorigen Satze seine Polare b durch A. Zwei Punkte A und B, welche eine solche Lage haben, dafs die Polare eines jeden durch den anderen geht und zwei Gerade a und b, welche eine solche Lage haben, dafs der Pol einer jeden auf der anderen liegt, nennt man *konjugierte Punkte* und *konjugierte Gerade.*

b) *Einem Punkte sind alle Punkte seiner Polare und einer Geraden sind alle Geraden durch ihren Pol konjugiert.*

c) Drei Punkte bilden ein *Poldreieck*, wenn jede Ecke der Pol der gegenüberliegenden Seite und also jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke ist.

d) *In jedem einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Vierecke bilden die Schnittpunkte der Gegenseiten ein Poldreieck.*

CDD_1C_1 ist (Fig. 21) ein eingeschriebenes Viereck; die Gegenseiten schneiden sich in A, B, E und da

$$A \text{ und } BE, \quad B \text{ und } AE, \quad E \text{ und } AB$$

Pol und Polare sind (39) so ist ABE ein Poldreieck.

41. a) *Jede Gerade durch den Schnittpunkt zweier Tangenten wird durch ihren Pol von diesen harmonisch getrennt.*

Die Tangenten a und b berühren die Hyperbel in A und B und schneiden sich in S. Durch S ziehe man eine beliebige Gerade c, welche AB in C trifft, so mufs der Pol von c derjenige Punkt D von AB sein, welcher C von A und B harmonisch trennt. Denn die Polaren der Punkte D, A, B müssen sich im Pole S von AB schneiden.

Es sind also $S(ABCD)$ harmonische Strahlen.

b) *In jedem einer gleichseitigen Hyperbel umgeschriebenen Vierseite bilden die drei Diagonalen ein Poldreieck.*

Das umgeschriebene Viereck sei $ABCD$; es schneiden sich die Gegenseiten (Fig. 22)

AB und CD in E, AD und BC in F, AC und BD in G.

Die Berührungspunkte auf

$$AB,\quad BC,\quad CD,\quad DA$$

seien

$$\mathfrak{A},\quad \mathfrak{B},\quad \mathfrak{C},\quad \mathfrak{D}.$$

Der Pol von BD mufs wegen a. der Schnittpunkt H von AC und EF sein; ebenso folgt, dafs der Pol von AC der

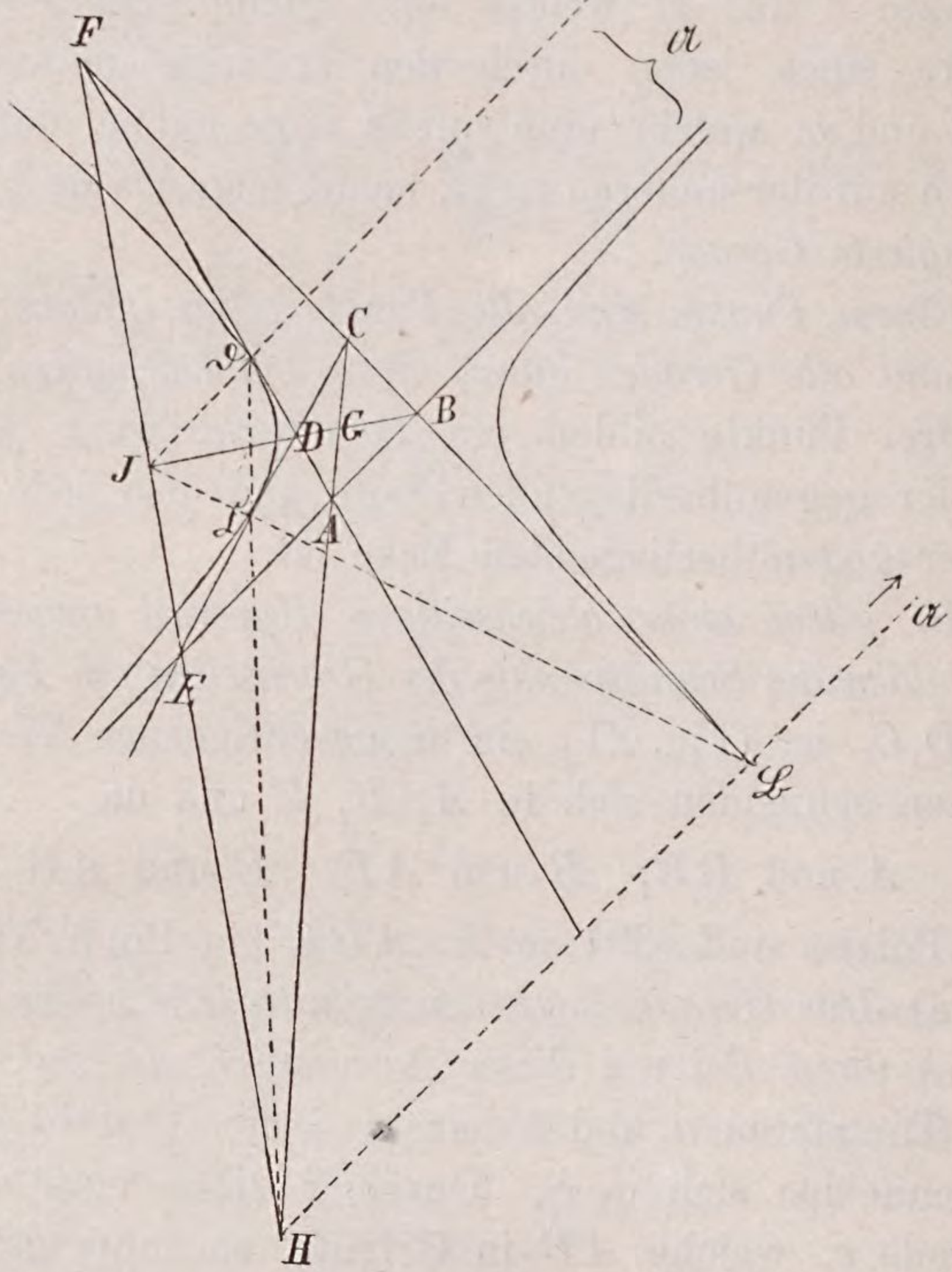

Fig. 22.

Schnittpunkt J der Geraden BD und EF ist. Der Schnittpunkt G von AC und BD ist also der Pol von HJ und folglich ist GHJ ein Poldreieck.

c) *In jedem einer gleichseitigen Hyperbel umgeschriebenen Vierseite treffen sich im Schnittpunkte zweier Diagonalen die Verbindungslinien zweier Paare von Berührungspunkten und trennen jene harmonisch.*

Da der Pol von BD der Schnittpunkt von $\mathfrak{AB}$ und $\mathfrak{CD}$ sein mufs, so treffen sich $\mathfrak{AB}$ und $\mathfrak{CD}$ in H; da ferner J

und GH je zwei Punkte der Hyperbel harmonisch trennen, so sind

$$H(IG\mathfrak{B}\mathfrak{C})$$

harmonische Strahlen.

42. *Auf zwei konjugierten Durchmessern einer gleichseitigen Hyperbel sind die Produkte der Entfernungen des Mittelpunktes von je zwei konjugierten Punkten einander gleich.*

Auf dem Durchmesser AA_1 sei B ein beliebiger Punkt, CD seine Polare, also BD Tangente. Diese treffe den konjugierten Durchmesser in E; die Polare dieses Punktes muſs durch D gehen und zu AA_1 parallel sein (37.); sie treffe ME in F.

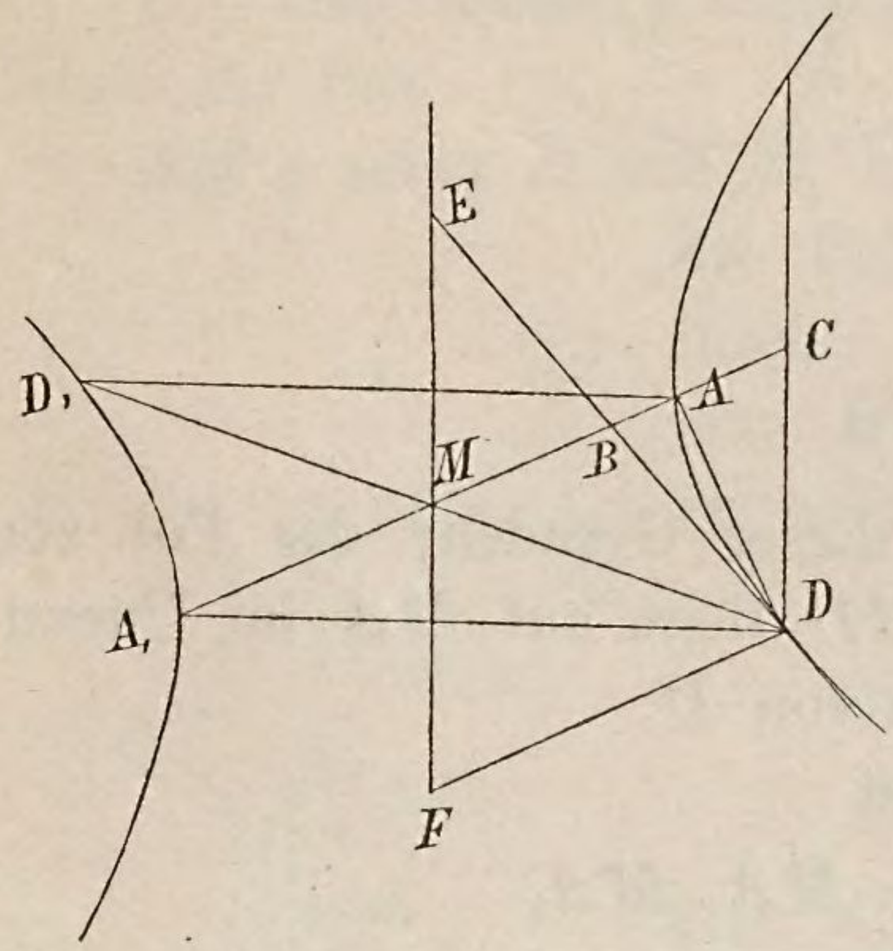

Fig. 23.

Zieht man durch D den Durchmesser DD_1, so ist

$$AD_1 \parallel A_1D$$
$$\sphericalangle A_1DD_1 = AD_1D = ADB$$
$$\sphericalangle AA_1D = ADC$$

(24 d. e.)

also durch Addition:

$$\sphericalangle CMD = CDB.$$

Daher:

$$\triangle CMD \sim CDB$$
$$CM : CD = CD : CB = ME : MB.$$

Setzt man hierin noch $CD = MF$, so wird

$$MB \,.\, MC = ME \,.\, MF.$$

Wie sich B und C auf AA_1 ändern mögen, immer ist

$$MB \,.\, MC = MA^2,$$

also ist auch für jedes Paar konjugierter Punkte

$$ME \,.\, MF = MA^2.$$

43. a) *Der Umkreis eines jeden Poldreiecks einer gleichseitigen Hyperbel geht durch den Mittelpunkt* (Fig. 24).

ABC sei ein Poldreieck. Der konjugierte Durchmesser zu MA ist parallel zu BC. Man schneide ihn mit AB in D und ziehe durch C zu MA die Parallele, welche ihn in D_1

trifft, dann sind D und D_1 konjugierte Punkte. Denn da D im Durchschnitte von AB und MD liegt, so ist seine Polare

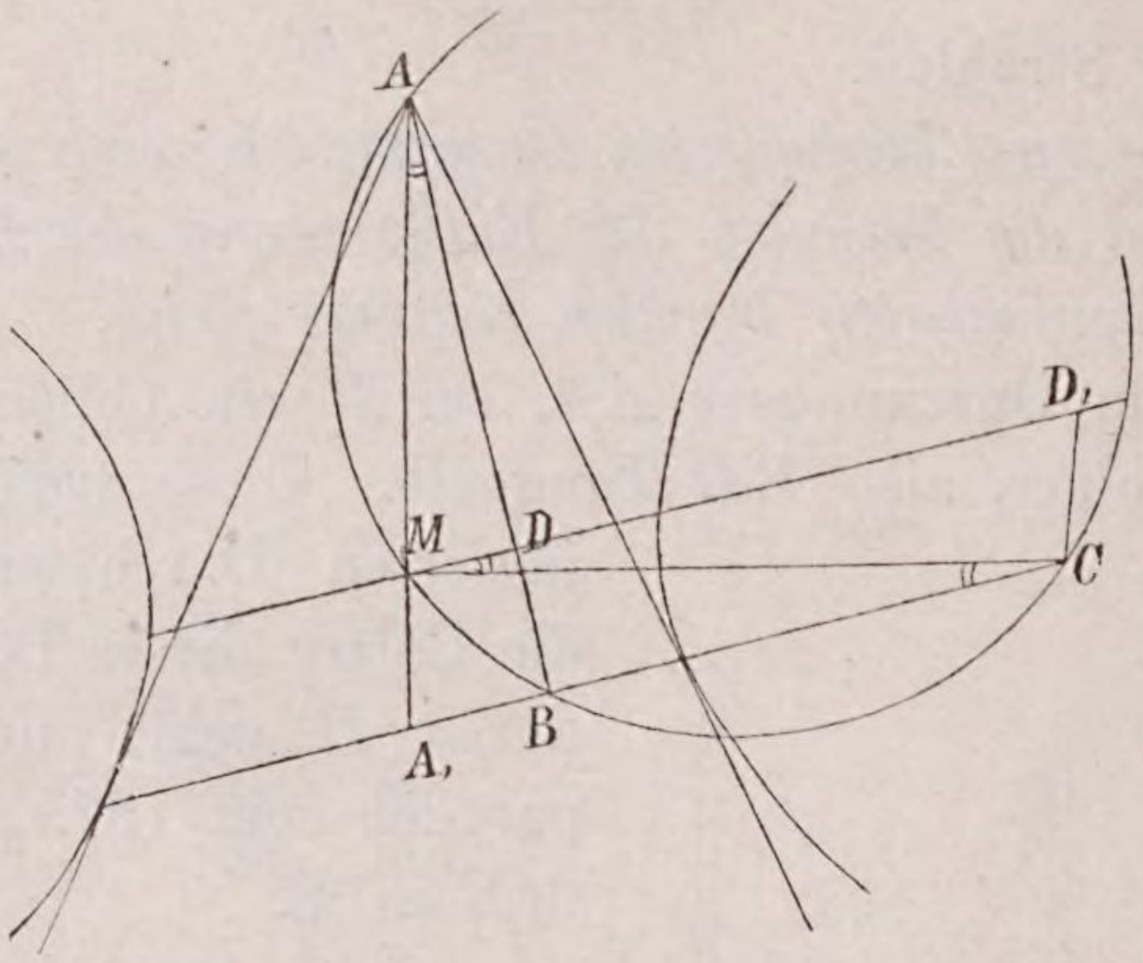

Fig. 24.

die Verbindungslinie der Pole dieser Geraden; der Pol von AB ist C und derjenige von MD liegt auf MA im Unendlichen; also ist CD_1 die Polare von D.

Nach dem vorigen Satze ist

$$MD \,.\, MD_1 = MA \,.\, MA_1$$

und weil im Parallelogramme $A_1 CD_1 M$

$$MA_1 = CD_1$$

ist, so ist auch

$$MD \,.\, MD_1 = MA \,.\, CD_1$$

$$MD : MA = CD_1 : MD_1,$$

also

$$\triangle MAD \sim MCD_1$$

$$\sphericalangle MAD = CMD_1 = MCB,$$

also liegen $ABCM$ auf einem Kreise.

b) *Durch vier Tangenten sind zwei gleichseitige Hyperbeln bestimmt* (cf. 21 c.).

Ein geometrischer Ort für den Mittelpunkt ist der Kreis um das von den Tangenten bestimmte Poldreieck; einen zweiten findet man wie in 21 c.

44. *Das Produkt der Entfernungen zweier konjugierten Punkte einer Geraden g von dem Schnittpunkte der letzteren mit ihrem konjugierten Durchmesser ist konstant.*

I. Die Gerade g schneide die gleichseitige Hyperbel in A und A_1; der zu g konjugierte Durchmesser treffe in Q. Auf g seien B und B_1 zwei konjugierte Punkte, also

$$AA_1 \; BB_1$$

harmonisch und da

$$AQ = A_1Q$$

ist, so folgt sofort:

$$AQ^2 = QB \,.\, QB_1 \,.$$

II. Die Gerade g trifft die gleichseitige Hyperbel nicht; G sei ihr Pol.

Auf g seien B und B_1 konjugierte Punkte, also ist B_1G die Polare von B und dem Durchmesser BM konjugiert, ebenso wie g dem Durchmesser GM konjugiert ist. Deshalb ist

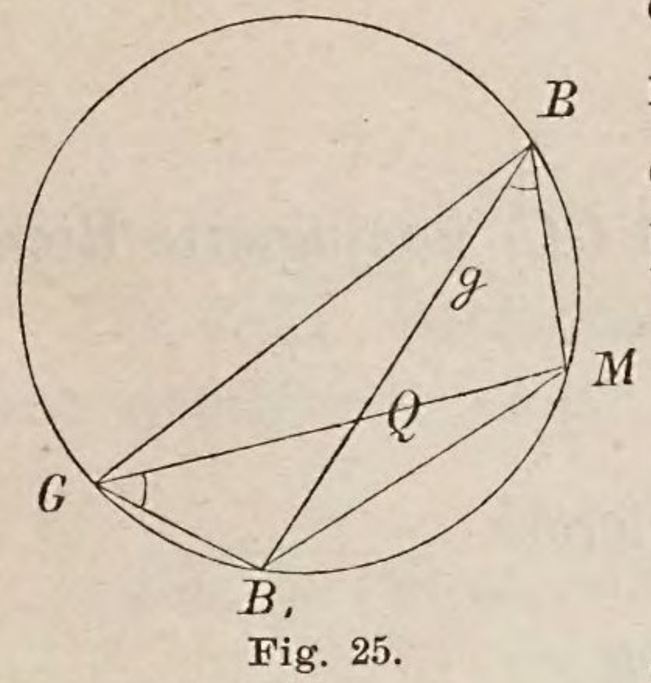

Fig. 25.

$$\sphericalangle B_1GM = B_1BM \text{ (24 d.)}$$

BB_1GM ein Kreisviereck

$$BQ \,.\, B_1Q = GQ \,.\, MQ,$$

also konstant.

45. a) *Andere Definition der Brennpunkte und Leitlinien.*

Auf der Hauptachse seien B und $\mathfrak{B}$ zwei konjugierte Punkte von der Lage (Fig. 26), dafs

$$M\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}MB$$

ist. Man nennt B einen *Brennpunkt* der gleichseitigen Hyperbel und seine Polare l, die in $\mathfrak{B}$ auf der Hauptachse senkrecht steht, seine *Leitlinie.*

b) *Konstruktion der Brennpunkte und Leitlinien.*

Aus den Gleichungen

$$MB \,.\, M\mathfrak{B} = a^2 \quad \text{und} \quad M\mathfrak{B} = \tfrac{1}{2}MB$$

folgt

$$c^2 = MB^2 = 2\,a^2 \,.$$

c) *Je zwei konjugierte Strahlen eines Brennpunktes stehen aufeinander senkrecht.*

Durch B ziehe man eine beliebige Gerade, welche l in C treffe; die Polare von C mufs durch B gehen, sie schneide

l in C_1. Die konjugierten Strahlen BC und BC_1 sollen aufeinander senkrecht stehen.

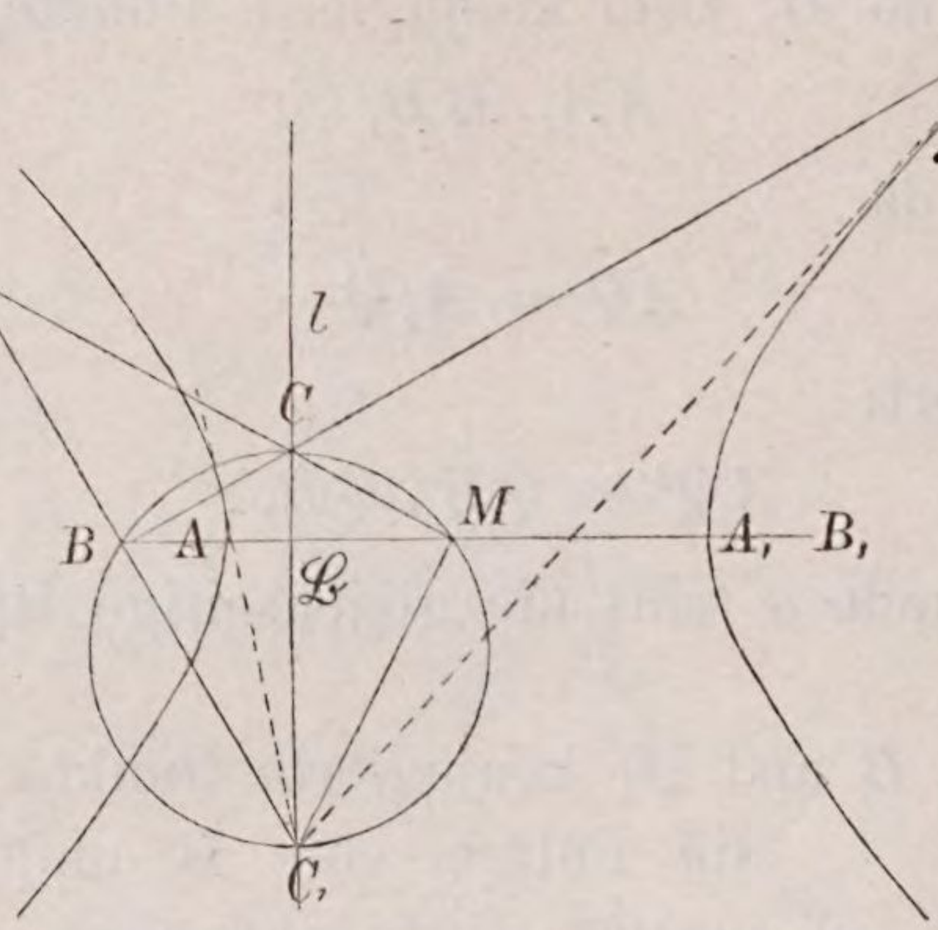

Fig. 26.

Da CM und C_1B, sowie $\mathfrak{B}M$ und CC_1 konjugierte Richtungen sind (37.), so ist (24 d.)

$$\sphericalangle BMC_1 = BCC_1$$

BCC_1M ein Kreisviereck

und da (23 c. 24 d.)

$$\sphericalangle CBC_1 = CMC_1$$

ist, so mufs jeder ein Rechter sein.

d) *Der Pol einer Brennpunktssehne liegt auf seiner Leitlinie senkrecht über dem Brennpunkte.*

Folgt aus c. cf. Fig. 26.

e) *Der Winkel der Strahlen vom Brennpunkte nach den Berührungspunkten zweier Tangenten wird durch den Strahl nach ihrem Schnittpunkte halbiert* (cf. 34 a. Fig. 27).

D und D_1 seien die Berührungspunkte der Tangenten DE und D_1E; die Gerade DD_1, welche die Leitlinie l in C schneidet, ist die Polare von E, also ist C der Pol von BE und die Strahlen BC und BE sind konjugiert, folglich

$$\sphericalangle CBE = 90^0.$$

Ist C_1 der Schnittpunkt von DD_1 mit BE, so sind

$$CC_1DD_1 \quad \text{und} \quad B(CC_1DD_1)$$

harmonisch und weil

$$BC \perp BC_1$$

steht, so folgt:

$$\sphericalangle CBD = CBD_1 .$$

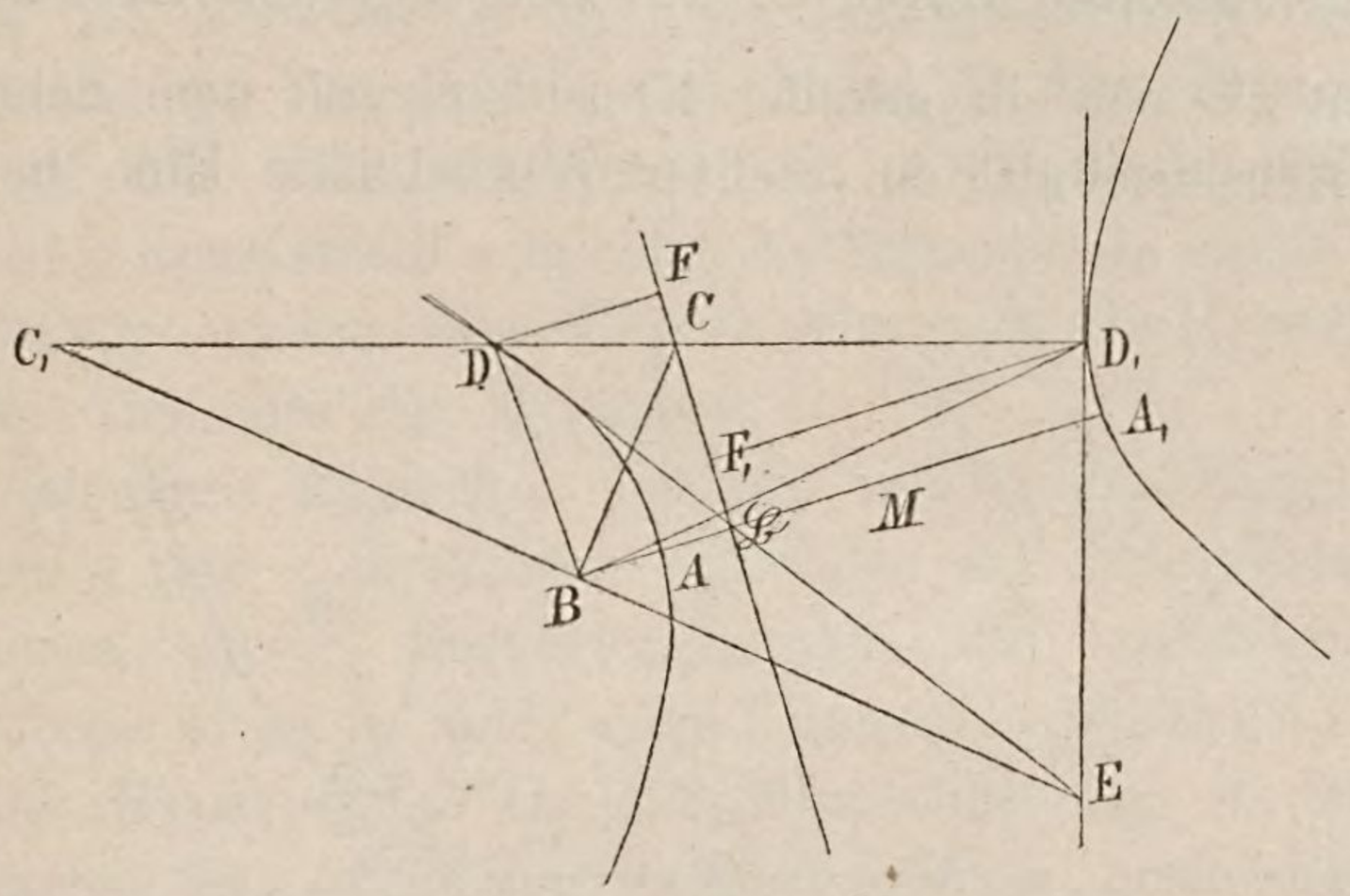

Fig. 27.

f) *Jeder Punkt der gleichseitigen Hyperbel hat von einem Brennpunkte und seiner Leitlinie das konstante Abstandsverhältnis* $\sqrt{2}$.

Aus der Gleichheit der Winkel CBD und CBD_1 folgt

$$DB : D_1B = DC : D_1C,$$

oder, wenn man von D und D_1 auf die Leitlinie l die Senkrechten DF und D_1F_1 fällt,

$$DB : D_1B = DF : D_1F_1$$

und hieraus:

$$DB : DF = D_1B : D_1F_1 .$$

Wenn sich DD_1 um D_1 dreht, so bleibt das Verhältnis $D_1B : D_1F_1$ ungeändert, also ist $DB : DF$ konstant.

Gelangt bei der Drehung D nach A, so wird

$$DB : DF = AB : A\mathfrak{B} .$$

Da aber:

$$MA^2 = MB \,.\, M\mathfrak{B}$$

$$MB : MA = MA : M\mathfrak{B}$$

$$MB - MA : MA - M\mathfrak{B} = MB : MA = \sqrt{2}\ (45\,\text{b.})$$

ist, so folgt:

$$AB : A\mathfrak{B} = \sqrt{2} .$$

§ 5.

Die gleichseitige Hyperbel auf dem geraden Kreiskegel.

46. $\varkappa^{(2)}$ sei ein gerader Kreiskegel mit dem Scheitel S, dessen Achsenschnitt ein rechter Winkel ist. Eine beliebige

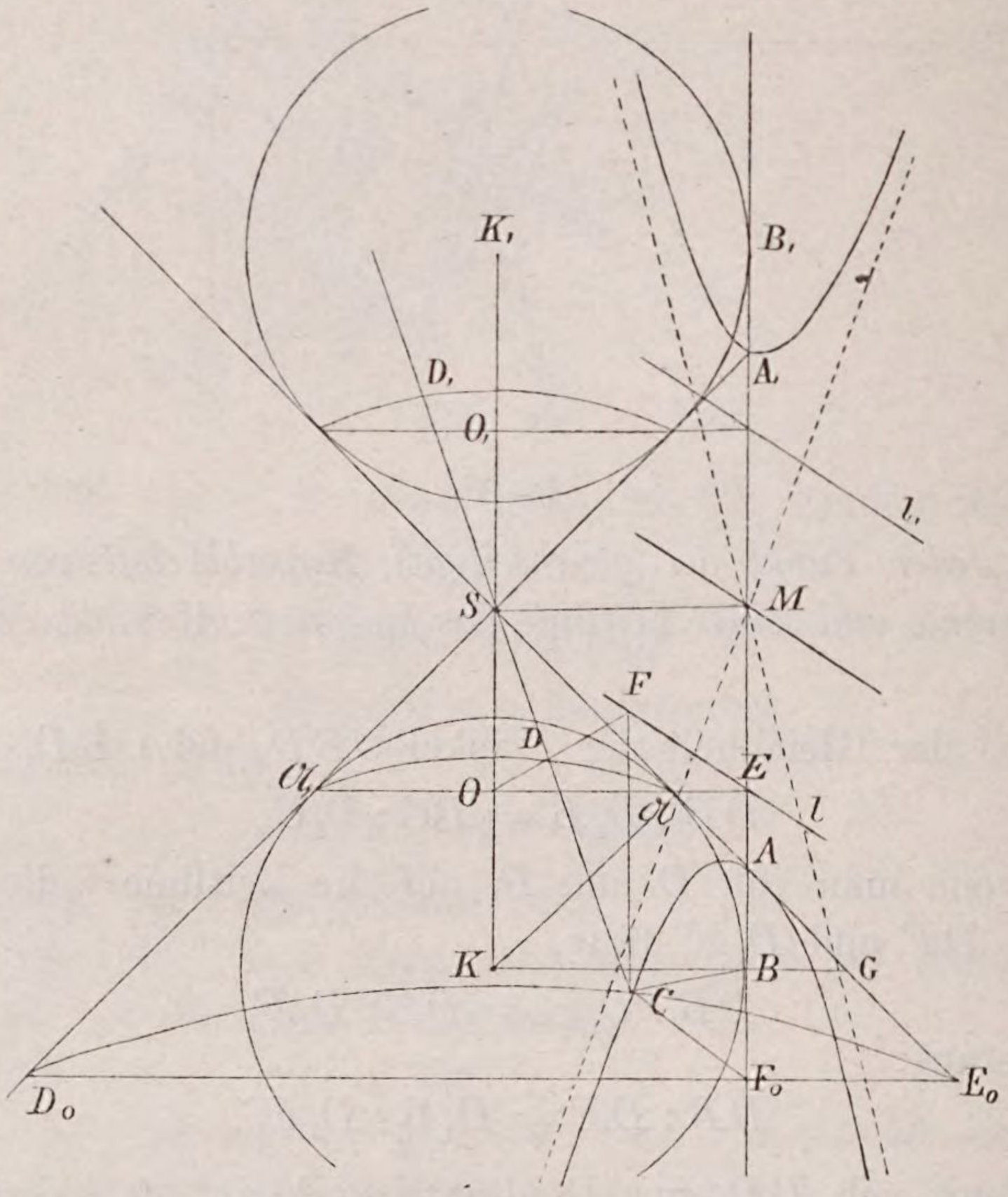

Fig. 28.

Ebene durch die Achse schneide den Kegel in den zu einander senkrechten Strahlen s und s_1.

Parallel zur Ebene $[ss_1]$ denke man sich eine Ebene η; sie schneidet den Kegel und seinen Scheitelkegel in zwei krummen Linien, die keinen Punkt im Endlichen gemein haben, aber in den beiden unendlich fernen Punkten der Kegelstrahlen s und s_1 zusammenhängen. Wegen der letzteren Eigenschaft faſst man die beiden krummen Linien als eine einzige auf und nennt diese eine *gleichseitige Hyperbel* $H^{(2)}$.

Die Ebene der Zeichnung schneide den Kegel in den Strahlen SD_0 und SE_0, die Ebene der gleichseitigen Hyperbel sei zur Ebene der Zeichnung senkrecht und schneidet SD_0 und SE_0 in den Punkten A und A_1, den *Scheiteln* der Hyperbel. AA_1 heifst die *Hauptachse*, ihre Mitte M der *Mittelpunkt* der Hyperbel, die Mittelsenkrechte von AA_1 ist die *Nebenachse*.

Jeder Kegelstrahl schneidet die Hyperbel in einem Punkte; jede Berührungsebene des Kegels schneidet die Hyperbelebene in einer Tangente der Hyperbel.

Diejenigen Ebenen σ und σ_1, welche den Kegel in den Strahlen s und s_1 berühren, schneiden die Hyperbelebene in Tangenten, deren Berührungspunkte die unendlich fernen Punkte von s und s_1 sind; diese Tangenten heifsen die *Asymptoten* der Hyperbel. — Da die Schnittlinie von σ und σ_1 die Nebenachse ist, so müssen die Asymptoten durch den Mittelpunkt M gehen; da sie den Kegelstrahlen s und s_1 parallel sind, so stehen sie aufeinander senkrecht und halbieren die Achsenwinkel.

Da der Achsenschnitt D_0E_0S den geraden Kegel in zwei symmetrische Teile zerlegt, so folgt:

Die Hauptachse der gleichseitigen Hyperbel trennt dieselbe in zwei symmetrische Teile.

47. *Das Lot von einem Punkte der gleichseitigen Hyperbel ist die mittlere Proportionale zu den Abschnitten, in welche es die Hauptachse teilt.*

C sei ein Punkt der Hyperbel; der durch ihn gehende Kegelkreis, dessen Ebene zur Ebene der Zeichnung senkrecht steht, schneide die in der Zeichnungsebene liegenden Strahlen in den Punkten D_0 und E_0. Die Ebenen des Kegelkreises und der Hyperbel schneiden sich in der Geraden CF_0, die auch auf der Ebene der Zeichnung senkrecht steht.

Da die Hyperbelebene der Achse des Kegels parallel ist, so ist:

$$D_0F_0 = A_1F_0, \quad E_0F_0 = AF_0$$

und weil

$$D_0F_0 : CF_0 = CF_0 : E_0F_0,$$

so ist auch

$$AF_0 : CF_0 = CF_0 : A_1F_0.$$

48. *Zieht man durch einen Punkt einer gleichseitigen Hyperbel Parallelen zu den Asymptoten, so schneiden sie die Achsen in solchen Punkten, daſs das Produkt ihrer Entfernungen vom Mittelpunkte konstant gleich dem Quadrate der halben Hauptachse ist.*

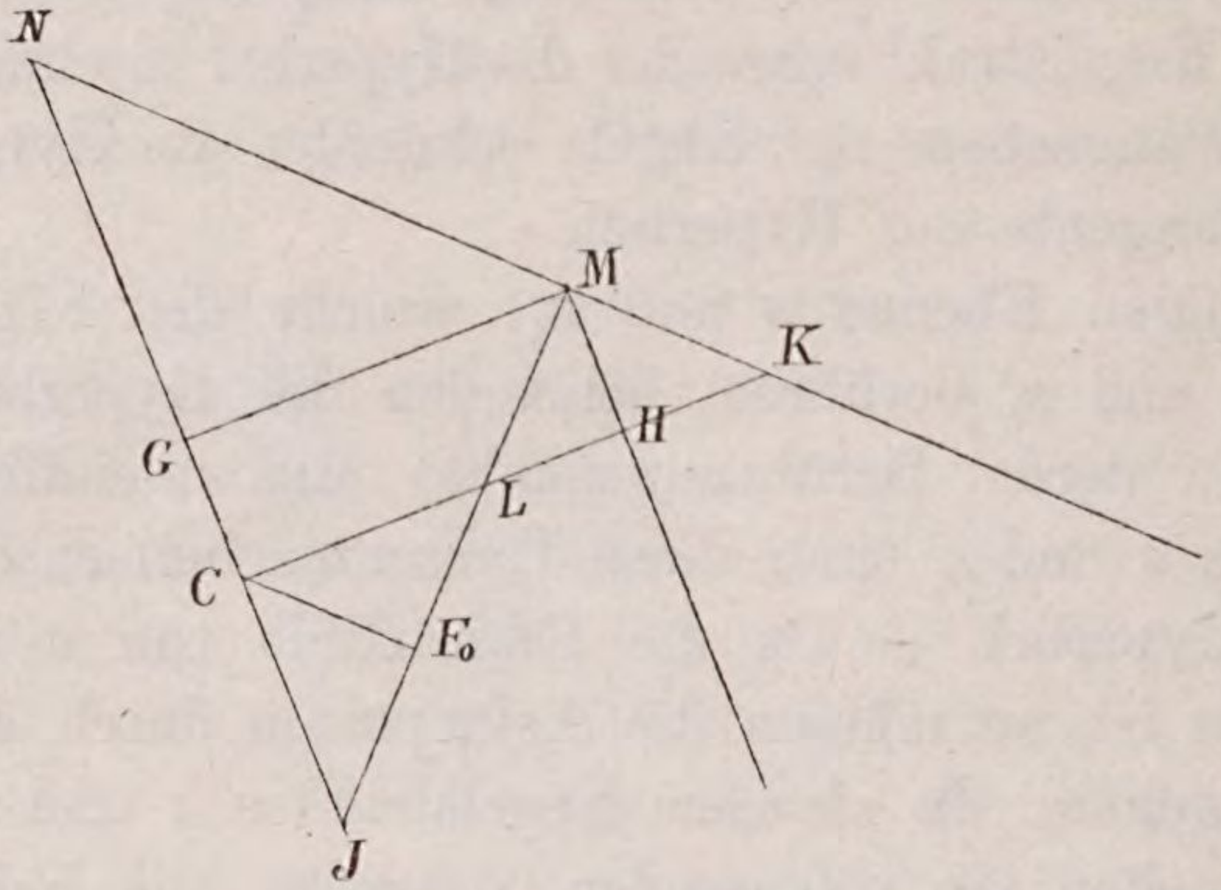

Fig. 29.

Durch den Hyperbelpunkt C ziehe man Parallelen zu den Asymptoten, welche die Hauptachse in I und L, die Nebenachse in K und N schneiden. Dann ist

$$\begin{aligned} MI \,.\, ML &= (MF_0 + CF_0)\,(MF_0 - CF_0) \\ &= MF_0^{\,2} - CF_0^{\,2} \\ &= MF_0^{\,2} - AF_0 \,.\, A_1F_0 \text{ (cf. 47)} \\ &= MF_0^{\,2} - (MF_0 + AM)\,(MF_0 - AM) \\ &= AM^2 \,. \end{aligned}$$

Da:

$$MK = ML, \quad MN = MI,$$

so ist auch

$$MK \,.\, MN = AM^2 \,.$$

49. *Das Produkt der Senkrechten aus einem Hyperbelpunkte auf die Asymptoten ist konstant* (cf. 1, Fig. 29).

Von dem Hyperbelpunkte C seien auf die Asymptoten die Lote CG und CH gefällt und in I, L und K mit der

Haupt- und Nebenachse zum Durchschnitte gebracht, endlich sei CF_0 senkrecht zur Hauptachse, dann ist

$$\triangle MIG \sim MKL,$$

also:

$$MI : MG = KL : ML$$
$$MI \,.\, ML = MG \,.\, KL.$$

Nun ist aber:

$$KL = 2\,MH = 2\,CG$$
$$MG \,.\, KL = 2\,MG \,.\, CG,$$

also:

$$2\,MG \,.\, CG = 2\,CH \,.\, CG = AM^2.$$

50. *Die Strecke einer Tangente einer gleichseitigen Hyperbel, welche zwischen den Asymptoten liegt, wird durch den Berührungspunkt halbiert.*

Da die Asymptoten in denjenigen Berührungsebenen des Kegels liegen, welche sich in der Nebenachse schneiden und diese auf der Kegelachse senkrecht ist, so durchschneiden dieselben Ebenen irgend eine Kreisebene des Kegels in zwei parallelen Tangenten.

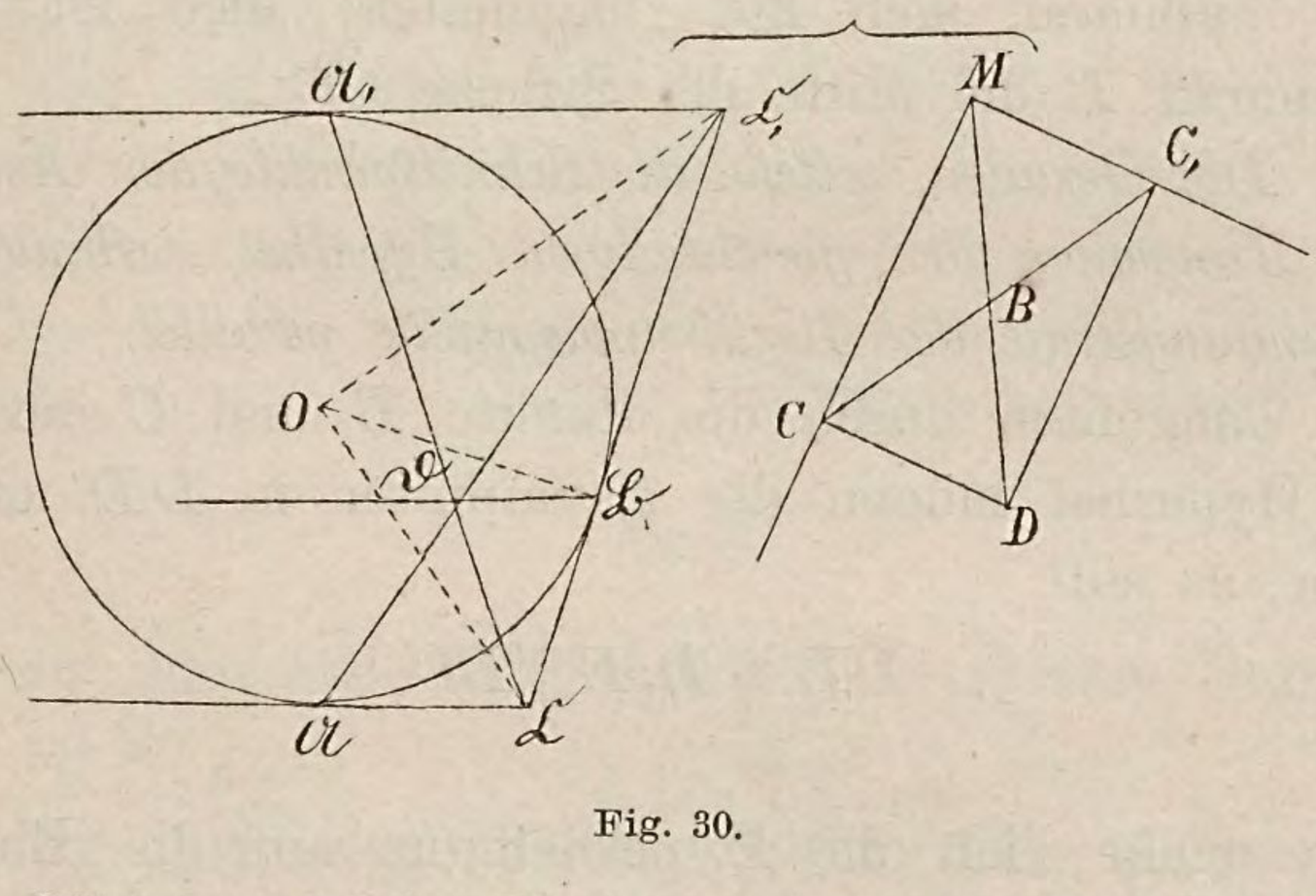

Fig. 30.

Der Mittelpunkt des Kreises sei O, die Berührungspunkte der parallelen Tangenten seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$.

Irgend eine Tangente der gleichseitigen Hyperbel berühre diese in B und schneide die Asymptoten in C und C_1; dann schneidet die Ebene $[SCC_1]$ die Ebene des Kreises $O^{(2)}$ in einer

Tangente, welche den Kreis in $\mathfrak{B}$ berühren und die parallelen Tangenten in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ schneiden mag.

Zieht man nun durch $\mathfrak{B}$ die Parallele zu $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und schneidet sie mit $\mathfrak{A}\mathfrak{C}_1$ in $\mathfrak{D}$, so folgt aus ähnlichen Dreiecken

$$\mathfrak{B}\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{C} \,.\, \mathfrak{B}\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1}.$$

Weil

$$\sphericalangle\, \mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{C}_1 = 90^0, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{C},$$

so ergiebt sich sofort

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} \,.\, \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{C} \,.\, \mathfrak{B}\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{D}\mathfrak{B}^2$$

und

$$\mathfrak{B}\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1}.$$

Deshalb mufs $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}$ die Parallele $\mathfrak{B}\mathfrak{D}$ in dem Punkte $\mathfrak{D}$ treffen.

Da der unendlich ferne Schnittpunkt von $\mathfrak{A}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1$ die Projektion des Hyperbelmittelpunktes M ist, so müssen sich auf der Verbindungslinie MB die Geraden schneiden, welche C und C_1 mit den Berührungspunkten der Asymptoten verbinden, also diesen parallel sind. In dem Parallelogramme $MCDC_1$ halbieren sich die Diagonalen; also ist der Berührungspunkt B die Mitte der Strecke CC_1.

51. *Die Geraden, welche die Schnittpunkte der Asymptoten mit zwei Tangenten der gleichseitigen Hyperbel verbinden, sind der Verbindungslinie der Berührungspunkte parallel.*

Die Tangenten durch die Punkte B und C der gleichseitigen Hyperbel mögen die Asymptoten in DD_1 und EE_1 schneiden, es soll

$$DE_1 \parallel D_1E \parallel BC$$

sein.

Man denke sich die Hyperbelfigur auf die Ebene des Kreises $O^{(2)}$ projiziert, so erhält man als Projektionen der Asymptoten zwei parallele Tangenten in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, als Projektionen der Tangenten in B und C die Kreistangenten in $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, als Projektionen der Schnittpunkte DD_1EE_1 die Punkte $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$.

Die Projektion der unendlich fernen Geraden der Hyperbelebene ist der Kreisdurchmesser $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, da dieser in der zur Hyperbelebene parallelen Ebene $[S\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1]$ liegt.

Schneidet man $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{D}\mathfrak{E}_1$ in $\mathfrak{F}$, so ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{F} : \mathfrak{A}_1\mathfrak{F} = \mathfrak{A}\mathfrak{D} : \mathfrak{A}_1\mathfrak{E}_1 :$$

Aber

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D} \,.\, \mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{E} \,.\, \mathfrak{A}_1\mathfrak{E}_1 = r^2$$

(cf. den Beweis in 50.), also auch

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D} : \mathfrak{A}_1\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{E} : \mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{F} : \mathfrak{A}_1\mathfrak{F},$$

d. h. $\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}$ geht auch durch $\mathfrak{F}$.

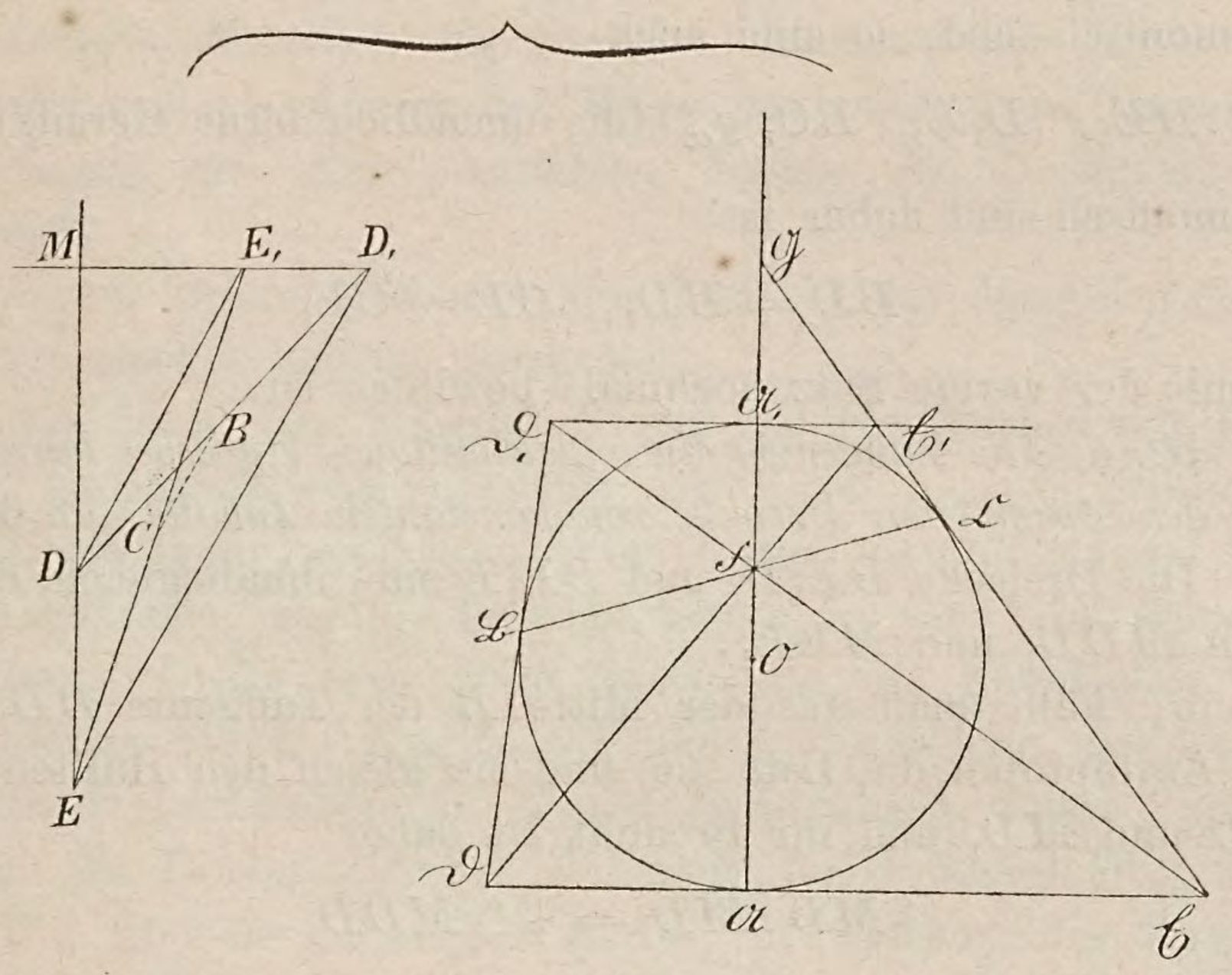

Fig. 31.

Wenn man noch $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$ in $\mathfrak{F}$ zum Durchschnitte bringt, so ist

$$\mathfrak{G}\mathfrak{E}_1 : \mathfrak{G}\mathfrak{E} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{E}_1 : \mathfrak{A}\mathfrak{E} = \mathfrak{C}\mathfrak{E}_1 : \mathfrak{C}\mathfrak{E},$$

also sind, da das Gleiche bei der Tangente $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ gilt,

$$\mathfrak{F}(\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1\mathfrak{A}\mathfrak{C}) \quad \text{uud} \quad \mathfrak{F}(\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

harmonische Strahlenbüschel. Bei diesen fallen drei Strahlenpaare

$\mathfrak{F}\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{F}\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ $\mathfrak{F}\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{A}_1$

zusammen, folglich auch

$\mathfrak{F}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{F}\mathfrak{C}$.

Es schneiden sich also

$\mathfrak{D}\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$

in einem Punkte von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und mithin

DE_1, D_1E, BC

im Unendlichen.

Weil

$\mathfrak{D}\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$

harmonisch sind, so sind auch

DE_1, D_1E, BC, g_∞ (die unendlich ferne Gerade)

harmonisch und daher ist

$$BD = BD_1, \quad CE = CE_1$$

womit der vorige Satz nochmals bewiesen ist.

52. a) *Die Tangenten einer gleichseitigen Hyperbel begrenzen mit den Asymptoten Dreiecke von konstantem Inhalte.* cf. 6 a.

Die Dreiecke DE_1D_1 und DE_1E sind inhaltsgleich, daher auch MDD_1 und MEE_1.

b) Fällt man aus der Mitte B der Tangente DD_1 auf die Asymptoten die Lote, so sind sie gleich den Hälften von MD und MD_1 und ihr Produkt ist daher

$$\tfrac{1}{4} MD \,.\, MD_1 = \tfrac{1}{2} \triangle MDD_1,$$

also konstant.

Hiemit ist der Satz 49. nochmals bewiesen.

53. a) *Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel* (Fig. 28).

Die Projektionen aller Durchmesser der Hyperbel auf die Ebene des Kreises $O^{(2)}$ sind parallele Sehnen von der Richtung SM; die Tangenten in ihren Endpunkten schneiden sich daher auf dem zur Nebenachse parallelen Kreisdurchmesser und da dessen Projektion auf die Hyperbelebene die unendlich ferne Gerade dieser Ebene ist, so schneiden sich die

Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers im Unendlichen und sind parallel.

b) *Zieht man durch den Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel einen Durchmesser d und die Parallele d_1 zu den Tangenten in seinen Endpunkten, so werden die von d und d_1 gebildeten Winkel durch die Asymptoten halbiert.*

Denn d und d_1 sind die Mittellinien desjenigen Parallelogramms (50), dessen Ecken die Schnittpunkte der Asymptoten mit den Tangenten sind.

54. *Die Brennpunkte und Leitlinien.*

a) *In den Kegel $\varkappa^{(2)}$ lassen sich zwei Berührungskugeln $\gamma^{(2)}$ und $\gamma_1{}^{(2)}$ legen, die auch die Hyperbelebene berühren. Die Berührungspunkte mit der letzteren heifsen die Brennpunkte der gleichseitigen Hyperbel; die Geraden, in denen die Ebene der Hyperbel von den Ebenen der Kreise geschnitten wird, in denen die Kugeln den Kegel berühren, heifsen die Leitlinien der Hyperbel.*

Je ein Brennpunkt und eine Leitlinie auf derselben Seite der Nebenachse heifsen zugeordnet.

Die durch den Scheitel S und die Hauptachse der Hyperbel gelegte Ebene schneidet den Kegel in zwei Strahlen; in die von ihnen gebildeten Winkel lege man diejenigen Berührungskreise, welche die Hauptachse in der Verlängerung berühren. Dreht man diese Kreise um die Kegelachse, so beschreiben sie die Kugeln $\gamma^{(2)}$ und $\gamma_1{}^{(2)}$, welche den Kegel und die Hyperbelebene in B und B_1 berühren. Diese Punkte heifsen die *Brennpunkte* der gleichseitigen Hyperbel (Fig. 28).

Die Ebenen derjenigen Kreise, in welchen die Kugeln $\gamma^{(2)}$ und $\gamma_1{}^{(2)}$ den Kegel berühren, schneiden die Ebene der Hyperbel in zwei zur Nebenachse parallelen Geraden l und l_1, den *Leitlinien* der gleichseitigen Hyperbel.

b) *Die Differenz der Entfernungen eines Hyperbelpunktes von den Brennpunkten ist gleich der Hauptachse.*

Die Berührungskugeln $\gamma^{(2)}$ und $\gamma_1{}^{(2)}$ berühren den Kegel $\varkappa^{(2)}$ in zwei Kreisen $O^{(2)}$ und $O_1{}^{(2)}$.

Sind B und B_1 die Brennpunkte, ist C ein Punkt der Hyperbel und schneidet der Kegelstrahl CS die Kreise $O^{(2)}$ und $O_1{}^{(2)}$ in D und D_1, so sind (Fig. 28)

$$CB, \quad CD \text{ und } CB_1, \quad CD_1$$

Tangenten an die Kugeln

$$\gamma^{(2)} \quad \text{und} \quad \gamma_1{}^{(2)}$$

und daher ist

$$CB = CD, \quad CB_1 = CD_1,$$

also:

$$CB_1 - CB = CD_1 - CD = DD_1 = 2SD.$$

Zieht man aber $SN \parallel KA$ (Fig. 28 und 32), so folgt

$$\triangle A\mathfrak{A}K \simeq MNS.$$

Denn

$$\sphericalangle SKA = SAK = 67\tfrac{1}{2}{}^0,$$

also

$$SK = SA = AN.$$

Folglich ist auch (siehe auch Fig. 28)

$$SD = S\mathfrak{A} = SM = AM$$

und

$$CB_1 - CB = AA_1.$$

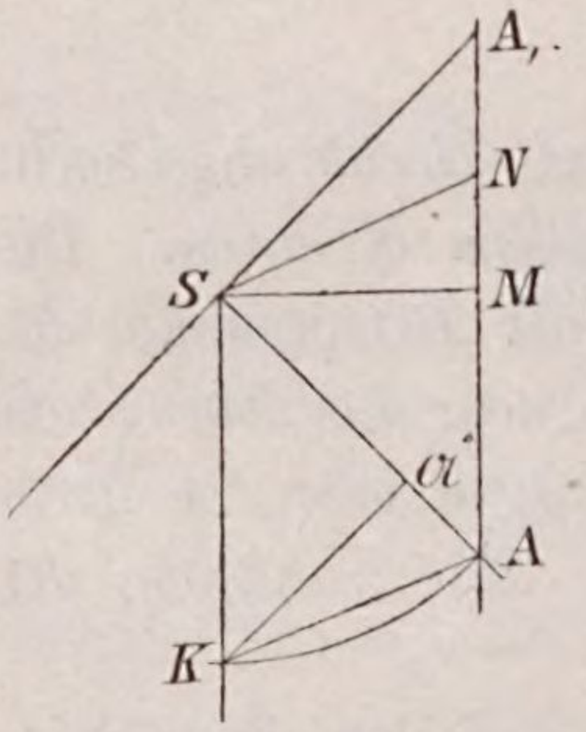

Fig. 32.

c) *Die Abstände irgend eines Punktes der gleichseitigen Hyperbel von einem Brennpunkte und seiner Leitlinie verhalten sich wie die Diagonale eines Quadrates zu seiner Seite* (Fig. 28).

Die Ebene des Winkels CSK schneidet die Ebene der Hyperbel in einer zu SK parallelen Geraden CF, die demnach auf der Leitlinie l senkrecht steht. — Da

$$\triangle CDF \sim SDO,$$

so folgt

$$CD : CF = SD : SO$$

oder:

$$CB : CF = S\mathfrak{A} : SO.$$

d) *Jede Leitlinie halbiert die Entfernung zwischen ihrem Brennpunkte und dem Mittelpunkte.*

Im Dreiecke SKG ist $K\mathfrak{A} \perp SG$, also

$$\mathfrak{A}S = \mathfrak{A}G$$

und

$$BE = ME.$$

55. *Gleichung der gleichseitigen Hyperbel.*

a) *In Bezug auf die Achsen.*

Setzt man (Fig. 28)

$$MF_0 = x, \quad CF_0 = y, \quad AA_1 = 2a,$$

so ergiebt sich sofort aus 47.

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

b) *In Bezug auf die Asymptoten.*

Setzt man (Fig. 29)

$$MG = x, \quad MH = y,$$

so folgt aus 48.

$$x \,.\, y = \tfrac{1}{2} a^2.$$

56. *Aus einem beliebigen Kreiskegel eine gleichseitige Hyperbel zu schneiden.*

a) $\varkappa^{(2)}$ sei ein Kreiskegel mit dem Scheitel S.

Auf $\varkappa^{(2)}$ sei s ein Strahl, senkrecht zu ihm durch S die Ebene ε. Diese schneide den Kegel in den Strahlen s_1 und s_2, dann ist

$$s \perp s_1, \quad s \perp s_2.$$

Jede zur Ebene $[ss_1]$ oder $[ss_2]$ parallele Ebene soll den Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel schneiden.

Es sei also η eine zu $[ss_1]$ parallele Ebene, sie schneidet den Kegel in einer krummen Linie $H^{(2)}$.

Diese erscheint als Projektion irgend eines Kreises auf dem Kegel. Jeder Punkt und jede Tangente des Kreises wird als Punkt und Tangente von $H^{(2)}$ projiciert.

Die Berührungsebenen des Kegels längs den Strahlen s und s_1 schneiden die Ebene von $H^{(2)}$ in zwei Tangenten t und t_1. Ihre Berührungspunkte sind die Schnittpunkte (ts) und $(t_1 s_1)$ und da $t \parallel s$, $t_1 \parallel s_1$, so liegen dieselben im Unendlichen. Es sind also t und t_1 Asymptoten von $H^{(2)}$.

b) *Alle Punkte, welche einen festen Punkt A von den Punkten der Kurve $H^{(2)}$ harmonisch trennen, liegen auf einer Geraden, der Polare des Punktes.*

c) *Alle Geraden, welche eine feste Gerade von den Tangentenpaaren der Kurve $H^{(2)}$ harmonisch trennen, schneiden sich in einem Punkte, dem Pole der Geraden.*

d) *Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden und umgekehrt.*

Da $H^{(2)}$ Projektion eines Kegelkreises ist und die harmonischen Eigenschaften bei der Projektion erhalten bleiben, so darf man diese Sätze nur für den Kreis beweisen.

Beweis von b.

Ist $\mathfrak{A}$ ein fester Punkt in der Ebene des Kreises $\mathfrak{D}^{(2)}$ und wird er durch $\mathfrak{B}$ von den Kreispunkten $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ harmonisch getrennt, so gilt für die Mitte $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{AB}$ die Gleichung

$$\mathfrak{EB}^2 = \mathfrak{EC} \,.\, \mathfrak{ED}\,.$$

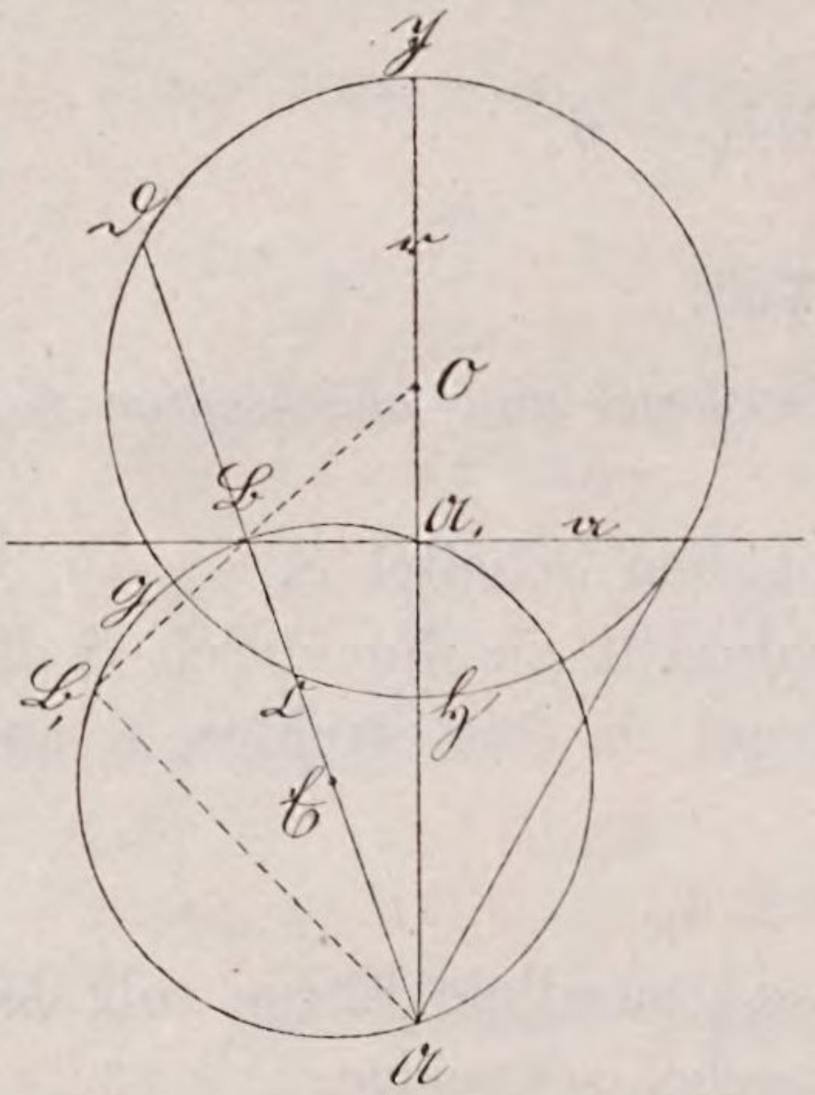

Fig. 33.

Beschreibt man um $\mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{EB}$ den Kreis $\mathfrak{E}^{(2)}$ und schneidet er $\mathfrak{D}^{(2)}$ in $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{EG}$ Tangente an $\mathfrak{D}^{(2)}$ und $\mathfrak{DG}$ Tangente an $\mathfrak{E}^{(2)}$, also

$$\mathfrak{DA} \,.\, \mathfrak{DA}_1 = \mathfrak{DG}^2 = \mathfrak{DH}^2$$

und folglich sind $\mathfrak{AA}_1\mathfrak{HJ}$ harmonisch. Da $\mathfrak{A}_1$ ein fester Punkt von $\mathfrak{AD}$ ist und $\mathfrak{BA}_1 = \mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{AA}_1$ senkrecht steht, so ist $\mathfrak{a}$ eine feste Gerade, auf welcher alle Punkte liegen müssen, welche den Kreis harmonisch von $\mathfrak{A}$ trennen. Sie heifst die *Polare* von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ ihr *Pol.*

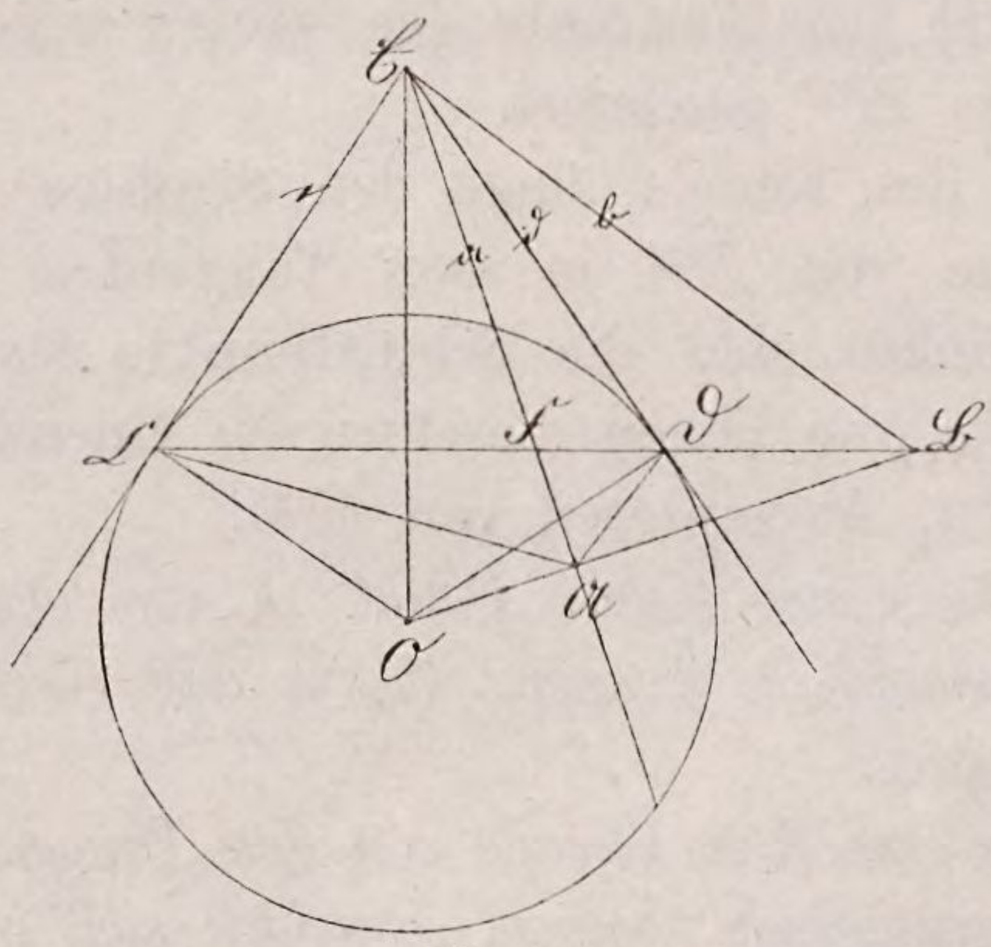

Fig. 34.

Beweis von c.

Ist $\mathfrak{a}$ eine feste Gerade und wird sie durch $\mathfrak{b}$ von den Tangenten $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ harmonisch getrennt, so fälle man

$$\mathfrak{DA} \perp \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{DC} \perp \mathfrak{c},$$
$$\mathfrak{DD} \perp \mathfrak{d},$$

dann sind

$$\mathfrak{ADCE} \text{ und } \mathfrak{ADDE}$$

Kreisvierecke und

$$\sphericalangle\, \mathfrak{CAE} = \mathfrak{CDE}, \quad \mathfrak{DAE} = \mathfrak{DDE},$$

daher auch

$$\sphericalangle \mathfrak{CAE} = \mathfrak{DAE}$$

und es ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{CDED})$ ein harmonischer Strahlenbüschel; $\mathfrak{DA}$ und $\mathfrak{b}$ müssen sich in $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{CD}$ schneiden, da beide $\mathfrak{CD}$ im vierten $\mathfrak{F}$ zugeordneten harmonischen Punkte treffen.

$\mathfrak{B}$ ist also der Pol von $\mathfrak{a}$.

Beweis von d.

Man erhält nach a. die Polare eines Punktes $\mathfrak{A}$, wenn man (Fig. 33) den Durchmesser $\mathfrak{JH}$ durch $\mathfrak{A}$ zieht und auf ihm denjenigen Punkt $\mathfrak{A}_1$ konstruiert, welcher $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{J}$ harmonisch trennt und in $\mathfrak{A}_1$ auf $\mathfrak{DA}$ die Senkrechte errichtet. Ist $\mathfrak{r}$ der Kreisradius, so ist $\mathfrak{A}_1$ auch gegeben durch die Gleichung

$$\mathfrak{DA} \,.\, \mathfrak{DA}_1 = \mathfrak{r}^2 .$$

Zieht man $\mathfrak{DB}$ bis zum Durchschnitte in $\mathfrak{B}_1$ mit dem Kreise $\mathfrak{E}^{(2)}$, so ist

$$\mathfrak{DB} \,.\, \mathfrak{DB}_1 = \mathfrak{DA} \,.\, \mathfrak{DA}_1 = \mathfrak{r}^2$$

und weil

$$\sphericalangle \mathfrak{AB}_1\mathfrak{B} = 90^0,$$

so ist $\mathfrak{AB}_1$ die Polare von $\mathfrak{B}$.

$\mathfrak{B}$ ist ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{a}$ und seine Polare $\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}$ geht durch den Pol $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{a}$. Anders aufgefafst: $\mathfrak{AB}_1$ ist eine beliebige Gerade durch $\mathfrak{A}$ und ihr Pol $\mathfrak{B}$ liegt auf der Polare $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{A}$.

e) Die übrigen Polareigenschaften folgen wie in § 4.

57. *Das Stück jeder Tangente $H^{(2)}$, welches zwischen den Asymptoten liegt, wird durch den Berührungspunkt halbiert.*

Die Tangente im Punkte C schneide die Asymptoten in A und B. Dann liegt nach 56 d. der Pol von MC auf der Tangente AB und auf der Polare g_∞ von M; er wird von MC nach b. durch die beiden Asymptoten harmonisch getrennt, also ist

$$AC = BC.$$

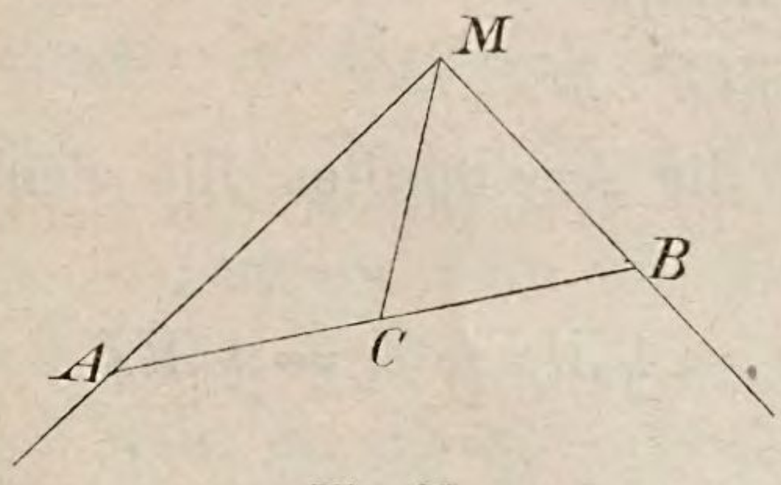

Fig. 35.

58. *Irgend zwei Tangenten von $H^{(2)}$ schneiden die Asymptoten in solchen Punkten, deren Verbindungslinien parallel sind.*

Die Berührungspunkte der Asymptoten seien B_∞ und D_∞; die Tangenten in A und C schneiden die Asymptoten in EE_1 und FF_1.

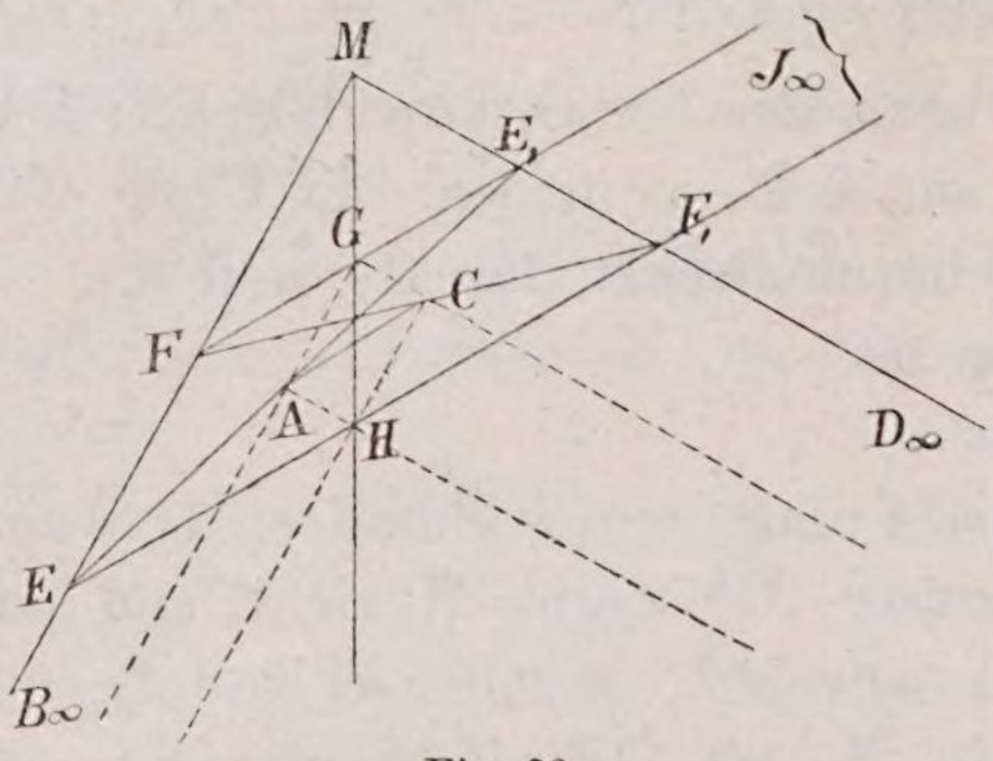

Fig. 36.

Der Kurve $H^{(2)}$ ist das Viereck $A\,B_\infty\,C\,D_\infty$ eingeschrieben; seine Gegenseiten

AB_∞ und CD_∞,
AD_∞ und CB_∞,
AC und $B_\infty D_\infty$

mögen sich in

$$G \quad , \quad H \quad , \quad I_\infty$$

schneiden. Dann sind

HJ_∞ und GJ_∞ die Polaren von G und H.

Der Pol von AG liegt nach 56 d. im Durchschnitte der Polaren von A und G, ist also der Punkt E_1; ebenso ergiebt sich, dafs F, E, F_1 die Pole von CG, AH, CH sind, also liegen wegen 56 d. die Punkte

$$I_\infty\,E_1\,G\,F \quad \text{und} \quad I_\infty\,E\,H\,F_1$$

je in einer Geraden, d. h. die Verbindungslinien EF_1 und E_1F sind parallel.

59. *Jede Tangente von $H^{(2)}$ begrenzt mit den Asymptoten ein Dreieck von konstantem Inhalte und jeder Punkt von $H^{(2)}$ hat solche Entfernungen von den Asymptoten, dafs ihr Produkt konstant ist. $H^{(2)}$ ist also eine gleichseitige Hyperbel.* cf. 1.

Weil $EF_1 \parallel E_1F$, so ist

$$\triangle\, MEF_1 \sim ME_1F$$
$$ME \,.\, ME_1 = MF \,.\, MF_1 .$$

Fällt man von A und C auf die Asymptoten die Senkrechten aa_1 und cc_1, so ist

$$a = \tfrac{1}{2}ME_1, \quad a_1 = \tfrac{1}{2}ME, \quad c = \tfrac{1}{2}MF_1, \quad c_1 = \tfrac{1}{2}MF$$

und daher

$$a \,.\, a_1 = c \,.\, c_1 = \tfrac{1}{4}ME \,.\, ME_1 .$$

60. *Legt man in einen geraden Kreiskegel mit rechtwinkligem Achsenschnitte gleiche Strecken von konstanter, zur Kreis-*

basis paralleler Richtung, so liegen ihre Mitten auf einer gleichseitigen Hyperbel.

Man denke sich diese konstante Richtung r durch den Scheitel S des Kegels, in letzterem die Sehne AB von bestimmter Länge s und auf ihr die Mitte C, so sind

$$SA,\quad SB,\quad SC,\quad r$$

vier harmonische Strahlen. Wie sich auch AB ändert, C liegt in der zu r senkrechten, durch S gelegten Ebene ϱ. Die zu ϱ im Abstande $\frac{1}{2}s$ parallele Ebene ϱ_1 geht durch A und schneidet den Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel. Die Lote aus den Punkten dieser Hyperbel auf ϱ treffen die Punkte C und diese liegen also auf einer kongruenten Hyperbel.

61. a) *Die Brennpunkte aller parallelen gleichseitigen Hyperbeln auf einem geraden Kreiskegel liegen auf zwei Geraden durch den Scheitel des Kegels.*

b) Einen geraden Kreiskegel mit rechtwinkligem Achsenschnitte in einer gleichseitigen Hyperbel zu schneiden, von welcher ein Brennpunkt in einem gegebenen Punkte liegt.

62. *Durch eine gleichseitige Hyperbel einen geraden Kreiskegel mit rechtwinkligem Achsenschnitt zu legen.*

Auf der Ebene der gleichseitigen Hyperbel $H^{(2)}$ errichte man in ihrem Mittelpunkte MS senkrecht und gleich der halben Hauptachse, so ist durch $H^{(2)}$ und S als Scheitel ein Kegel über der Hyperbel bestimmt. Jeder zu $H^{(2)}$ parallele Schnitt schneidet diesen Kegel in einer ähnlichen Figur, also wieder in einer gleichseitigen Hyperbel.

Irgend eine zur Hyperbelachse senkrechte Ebene schneidet diesen Kegel in einer krummen Linie $K^{(2)}$ (Fig. 28) und diese begegne der Hyperbel in C, dann ist

$$F_0E_0 \,.\, F_0D_0 = F_0A \,.\, F_0A_1 = F_0C^2 \,.$$

Verschiebt man die gleichseitige Hyperbel parallel mit sich selbst auf dem Kegel, so durchläuft C die Kurve $K^{(2)}$ und weil die vorige Gleichung bestehen bleibt, so ist $K^{(2)}$ ein Kreis.

63. *Eine gleichseitige Hyperbel $H^{(2)}$ auf eine gegebene Ebene η als Kreis zu projicieren.*

In der Ebene von $H^{(2)}$ ziehe man eine Gerade $g \parallel \eta$, so dafs sie $H^{(2)}$ nicht schneidet und denke sich auf ihr beliebig viele Paare konjugierter Punkte.

Ist XX_1 ein solches Paar, so giebt es auf g (44) einen festen Punkt Q von der Eigenschaft, dafs $QX \,.\, QX_1$ konstant ist. Demnach müssen sich die Kugeln über den Abständen je zweier konjugierter Punkte in einem Kreise der Ebene schneiden, welche in Q auf g senkrecht steht. Die Ebene durch g parallel zu η schneidet diesen Kreis in zwei Punkten. Ist einer derselben S, so schneidet der Kegel über $H^{(2)}$ mit dem Scheitel S die Ebene η in einem Kreise $K^{(2)}$.

Ist nämlich G der Pol von g in Bezug auf $H^{(2)}$, AA_1 eine Sehne durch G, so müssen sich AX und A_1X_1 sowie AX_1 und A_1X in zwei Punkten X' und X_1' von $H^{(2)}$ schneiden (40 d.). Die Projektionen von X' und X_1' aus S auf die Ebene η treffen zwei Punkte $\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{X}_1'$ von $K^{(2)}$. Die Projektionen von g und G sind g_∞ und $\mathfrak{G}$, diejenigen von A und A_1, X und X_1 sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$. Letztere liegen im Unendlichen.

Es müssen nun $\mathfrak{A}\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{A}\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{X}$ sich in $\mathfrak{X}'$ und $\mathfrak{X}_1'$ schneiden.

Da $\mathfrak{A}\mathfrak{X}'$ und SX, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{X}'$ und SX_1 sich in den Punkten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ von g_∞ schneiden, so ist

$$\mathfrak{A}\mathfrak{X}' \parallel SX, \quad \mathfrak{A}_1\mathfrak{X}' \parallel SX_1$$

$$\sphericalangle\, \mathfrak{A}\mathfrak{X}'\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{X}_1'\mathfrak{A}_1 = 90^0$$

$K^{(2)}$ ein Kreis.

64. *Der Ort eines Punktes, von dem aus ein Kreis $K^{(2)}$ auf eine zu ihm senkrechte Ebene η wieder als Kreis projiciert wird, ist eine gleichseitige Hyperbel.*

In der Ebene des Kreises ziehe man parallel zu η eine Gerade g, welche den Kreis nicht schneidet, fälle von seinem Mittelpunkte K die Senkrechte KQ auf g, ziehe von Q an $K^{(2)}$ die Tangente QR und beschreibe mit ihr um Q den Kreis, welcher KQ in P und P_1 schneidet. Ueber PP_1 errichte man in der durch PP_1 senkrecht zur Kreisebene gelegten Ebene den Kreis $P^{(2)}$ und in seiner Ebene die Senkrechte in Q auf PP_1; sie schneidet ihn in S und S_1.

Dann schneidet der Kegel $[SK^{(2)}]$ die Ebene η in einem Kreise $K^{(2)}$. Dies folgt wie in der vorigen Aufgabe.

KQ schneide den Kreis $K^{(2)}$ in A und A_1, dann ist

$$QS^2 = QP^2 = QR^2 = QA \,.\, QA_1.$$

Verschiebt man nun g parallel mit sich, so bleibt diese Gleichung bestehen: der Ort von S ist also eine gleichseitige Hyperbel, welche AA_1 zur Hauptachse hat.

§ 6.

Ergänzungen und Aufgaben.

65. Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man die Asymptoten und einen Punkt; man soll konstruieren:

a) einen anderen Punkt,
b) in ihm die Tangente,
c) die Achsen,
d) die Scheitel der Hauptachse.

66. Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man die Asymptoten und eine Tangente; man soll konstruieren:

a) eine andere Tangente,
b) ihren Berührungspunkt,
c) die Schnittpunkte mit einem Durchmesser,
d) in ihnen die Tangenten,
e) von einem Punkte einer Tangente die zweite Tangente.

67. In welchem Gebiete mufs ein Punkt liegen, damit die beiden Tangenten durch ihn a) an einen Zweig, b) an beide Zweige gehen?

68. Eine gleichseitige Hyperbel zu konstruieren aus:

a) der Hauptachse,
b) einem Durchmesser und einem Punkte,
c) der Lage der Hauptachse und zwei parallelen Tangenten.

69. Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man zwei Punkte und eine Asymptote (3).

70. Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man einen Durchmesser AA_1 und einen Punkt B; man soll auf einer durch B gezogenen Geraden g den zweiten Schnittpunkt konstruieren. (Fig. 6.)

Fällt man $AD \perp g$ und verlängert es über D hinaus bis E um sich selbst, und ist C der gesuchte Schnittpunkt, so ist

$$\sphericalangle BA_1C = BAC = BEC$$

und BA_1EC liegen auf einem Kreise.

71. Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man einen Durchmesser AA_1 und einen Punkt B; man soll auf einer durch A gezogenen Geraden den zweiten Schnittpunkt konstruieren. (Fig. 6.)

72. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man einen Durchmesser AA_1 und einen Punkt B; man soll ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden g konstruieren.*

Sind P und Q diese Schnittpunkte, so ist

$$\sphericalangle PAQ = PA_1Q.$$

Fällt man von A die Senkrechte auf g und bestimmt auf ihr (71) den Schnittpunkt H mit der Hyperbel, so ist dieser der Höhenpunkt des Dreiecks APQ und daher

$$\sphericalangle PAQ = PHQ.$$

Ist endlich D der Spiegelpunkt von A in Bezug auf g, so ist auch

$$\sphericalangle PAQ = PDQ = PA_1Q = PHQ.$$

Demnach liegen PQA_1HD auf einem Kreise.

73. Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man die Asymptoten und einen Punkt A. Man soll auf einer Geraden g, welche einer Asymptote parallel ist, den endlichen Schnittpunkt B bestimmen.

Ist A_1 diametral zu A, so sind die Geraden BA und BA_1 gleich geneigt gegen g (8b.).

74. Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man einen Durchmesser AA_1 und einen Punkt B; man soll einen anderen Punkt C derselben und auf dem Umkreise des Dreiecks ABC den vierten Schnittpunkt mit der Hyperbel konstruieren.

75. Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man einen Durchmesser und einen Punkt; man soll die Asymptoten konstruieren.

76. Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man vier Punkte; man soll die Asymptoten konstruieren.

77. *Vier Punkte bilden vier Dreiecke; die Feuerbach'schen Kreise derselben schneiden sich in einem Punkte.* (11.)

78. Eine gleichseitige Hyperbel zu konstruieren aus drei Punkten und einer Tangente, welche zu einer der Verbindungslinien senkrecht steht.

Sind ABC die drei Punkte, ist die Tangente $t \perp AB$ in D, X der Berührungspunkt, so ist (9b.)

$$DA \,.\, DB = DX^2.$$

79. *Sind* AA_1 *und* BB_1 *zwei Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel und ist* C *ein beliebiger Punkt derselben, so haben die Dreiecke* ABC *und* A_1B_1C *denselben Höhenpunkt.*

80. Einer gleichseitigen Hyperbel ist ein rechtwinkliges Dreieck eingeschrieben; man soll die Tangente im Scheitel des rechten Winkels konstruieren.

81. Durch zwei Punkte einer gleichseitigen Hyperbel einen Kreis zu legen, der dieselbe berührt.

82. In einem Punkte einer gleichseitigen Hyperbel den Krümmungskreis zu konstruieren.

83. *Durch einen gegebenen Punkt einer gleichseitigen Hyperbel an diese den Krümmungskreis zu legen.*

Ist B der gegebene Punkt und durch ihn der Krümmungskreis $O^{(2)}$ gelegt, welcher die Hyperbel in A (Fig. 7) berührt, so ist $\sphericalangle MAB = 90^0$ (9f.). Ein Kreis, welcher MB zum Durchmesser hat, schneidet die Hyperbel in den gesuchten Berührungspunkten.

84. *Man soll die Gröfse des Radius* r *des Krümmungskreises in einem Punkte* A *der gleichseitigen Hyperbel bestimmen.*

Es sei $MA = a_1$. In A errichte man die Senkrechte (Fig. 37) auf MA, welche die Asymptoten in C und D schneidet, konstruiere in A die Tangente, die den Asymptoten in E und F begegenen mag, halbiere CD in G und errichte in G auf CD und in A auf EF die Senkrechten, so schneiden sie sich im Mittelpunkte O des Krümmungskreises.

Denn, schneidet CD die Hyperbel noch in B, so ist $AC = BD$ und $AG = BG$.

Ist A_1 der diametrale Punkt zu A, so ist AA_1B ein rechtwinkliges eingeschriebenes Dreieck und folglich $EF \perp A_1B$

und weil $A_1 B \parallel MG$, auch $EF \perp MG$. Es mögen sich EF und MG in K schneiden, dann ist

$$\triangle AOG \sim AMK.$$

Setzt man $AO = r$, so folgt, da $GO = AM = a_1$,

$$r : a_1 = a_1 : MK$$

$$r = \frac{a_1^2}{MK}.$$

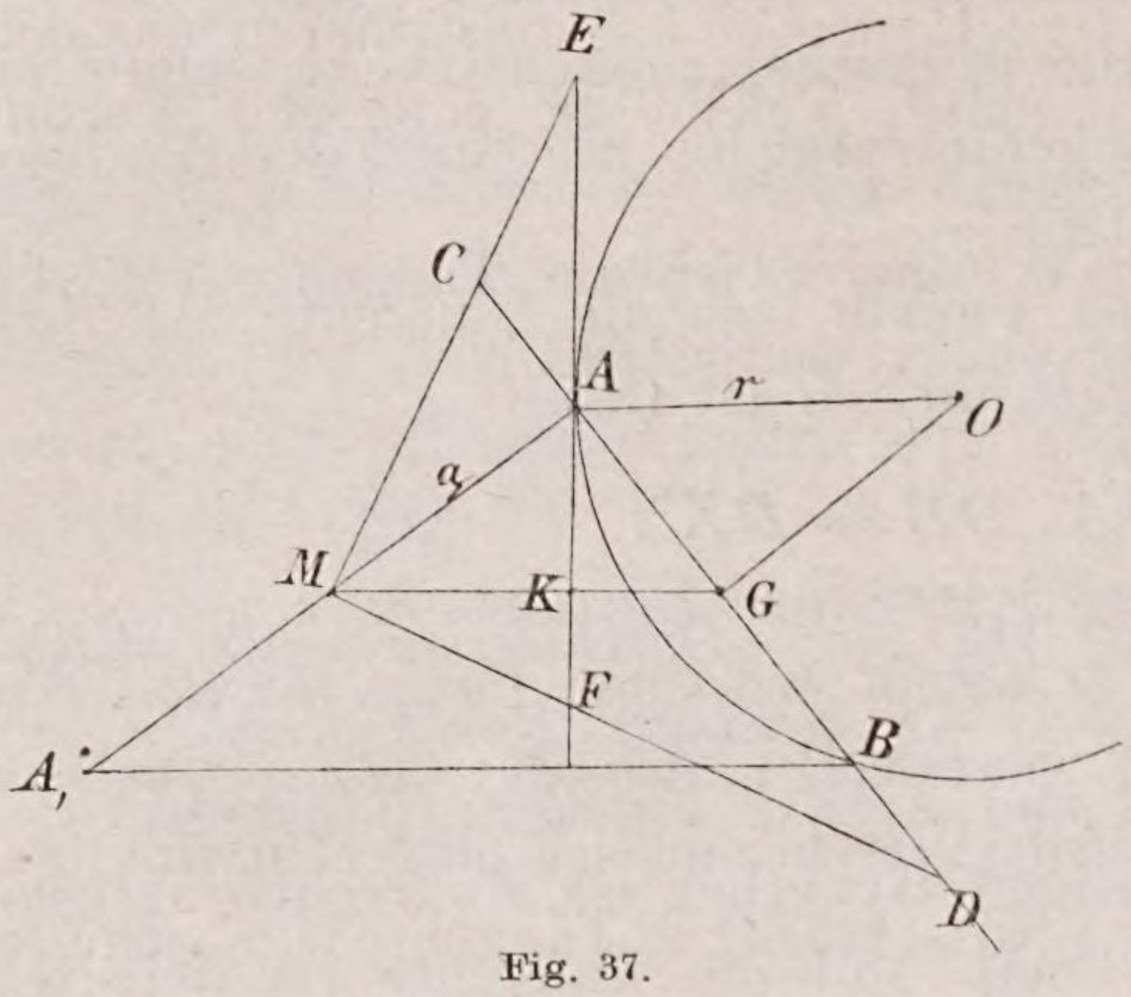

Fig. 37.

Aber:

$$MK^2 = FK \,.\, EK$$

$$= \frac{MF^2 \,.\, ME^2}{4 a_1^2},$$

also:

I. $$r = \frac{2 a_1^3}{ME \,.\, MF} = \frac{2 a_1^3}{4 q^2}$$

wenn man die Potenz der gleichseitigen Hyperbel mit q^2 bezeichnet. Ist $2a$ die Hauptachse, so folgt

$$q^2 = \tfrac{1}{2} a^2,$$

und

II. $$r = \frac{a_1^3}{a^2}.$$

85. *Ist* A A_1 B *ein der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenes, bei* A *rechtwinkliges, Dreieck und ist* A A_1 *ein Durchmesser, so ist* A_1 B *gleich dem Durchmesser des Krümmungskreises in* A.

86. In eine gleichseitige Hyperbel ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, dessen eine Kathete ein Durchmesser ist.

Der Durchmesser bildet mit der einen Asymptote einen Winkel von $22\,{}^1/_2{}^0$.

87. Man konstruiere den Krümmungskreis in einem Scheitel der Hauptachse.

88. Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man einen Punkt A, seinen Krümmungskreis und denjenigen Punkt, in welchem dieser noch die Hyperbel trifft. (Fig. 37.)

Es ist $\sphericalangle OAG = MAK = 2\,AMC$, weil

$$AE = AF = AM \text{ (4c.)}$$

89. Zur Hauptachse einer gleichseitigen Hyperbel ziehe

man eine senkrechte Gerade p, welche jene in O trifft, schneide auf MO die Strecke $OQ = a$ (der halben Hauptachse) ab, fälle von einem beliebigen Hyperbelpunkte P die Senkrechten PA und PB auf MO und p, so ist stets $BQ = AM$.

90. *Zwei Gerade* p *und* q *schneiden sich senkrecht in* O; *auf* q *sei* Q *ein fester Punkt. Ist* B *ein veränderlicher Punkt auf* p, *zieht man* QB *und in* B *die Strecke* BP *senkrecht auf* p, *so daſs* QB + BP *gleich einer konstanten Strecke* d *ist, so ist der Ort von* P *eine gleichseitige Hyperbel.*

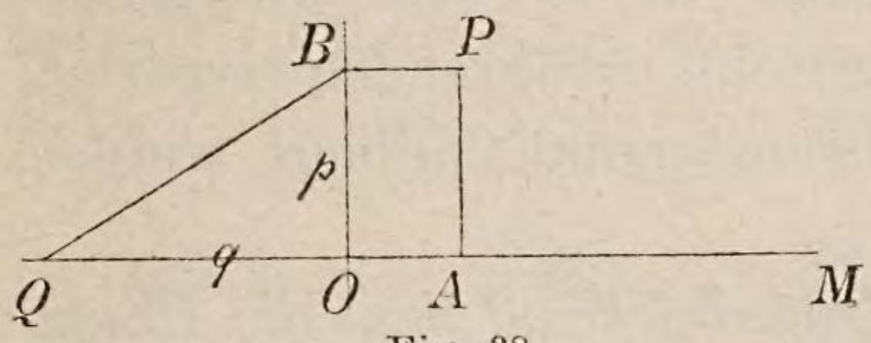

Fig. 38.

Macht man $OM = d$, fällt $PA \perp q$, setzt

$$AM = x, \quad AP = y,$$

so ist

$$d = QB + BP = QB + d - x,$$

also

$$QB = x.$$

Aber

$$QB^2 = QO^2 + y^2,$$

folglich

$$x^2 - y^2 = QO^2.$$

91. Man konstruiere mittelst des vorigen Satzes eine Vorrichtung zur organischen Konstruktion einer gleichseitigen Hyperbel.

92. Von einem Punkte P einer gleichseitigen Hyperbel fälle man PQ senkrecht auf eine Asymptote und ziehe durch P eine Gerade, welche dieselbe Asymptote in R unter dem Winkel α schneidet, so ist

$$QM \,.\, QR = \tfrac{1}{2} a^2 \,.\, \operatorname{ctg} \alpha.$$

93. Im Punkte M sind gegen eine feste Gerade a die veränderlichen Geraden x und x_1 gleich geneigt; zwischen dieselben werde eine Strecke von konstanter Länge und Richtung gelegt; der Ort ihrer Mitte ist eine gleichseitige Hyperbel, welche M als Mittelpunkt und a als eine Asymptote hat.

94. *Jede von zwei senkrechten Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel erscheint den Endpunkten der anderen unter gleichen oder supplementären Winkeln.* (9.)

95. Ist einer gleichseitigen Hyperbel ein gleichseitiges Dreieck eingeschrieben, so geht der ihm eingeschriebene Kreis

durch den Mittelpunkt der Hyperbel und sein Mittelpunkt liegt auf dieser. (9a. 11.)

96. *In eine gleichseitige Hyperbel ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.*

ABC sei ein der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenes gleichseitiges Dreieck, H sein Höhenpunkt, H_1 der zu ihm diametrale Punkt, so liegen $ABCH_1$ auf einem Kreise, (9d.), dessen Mittelpunkt H ist.

97. Um einen beliebigen Punkt einer gleichseitigen Hyperbel beschreibe man einen Kreis durch den Mittelpunkt derselben und konstruiere diejenigen ihn berührenden Hyperbelsehnen, welche durch den Berührungspunkt halbiert werden. (95. 96.)

98. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man die Hauptachse der Lage nach und zwei Punkte* P *und* Q.

Man konstruiere den Gegenpunkt P_1 von P in Bezug auf die Hauptachse und den Höhenpunkt Q_1 des Dreiecks PP_1Q, so geht die Mittelsenkrechte von QQ_1 durch den Mittelpunkt der Hyperbel.

99. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man den Kreis über der Hauptachse und einen Punkt* P; *man soll die Asymptoten konstruieren.*

Ist M der Mittelpunkt des Kreises und a sein Radius, sind x und y die Abstände von den Asymptoten, so findet man die Gleichungen

$$x^2 + y^2 = MP^2, \quad xy = q^2 = \tfrac{1}{2}a^2.$$

100. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man den Mittelpunkt* M *und zwei Punkte* A *und* B; *man soll die Tangente in* A *konstruieren.*

Man konstruiere den diametralen Punkt A_1 zu A; dann erscheint die Sehne AB den Punkten A und A_1 unter demselben Winkel. (8c.)

101. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man die Hauptachse; man soll ihre Schnittpunkte mit einer durch den Mittelpunkt* M *gelegten Geraden bestimmen.*

Sind P und P_1 die gesuchten Schnittpunkte, x und y ihre Abstände von den Asymptoten, so ist $x \,.\, y = \frac{1}{2}a^2$ und $x : y$ konstant.

102. Die Seiten eines der gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Parallelogrammes erscheinen jedem Hyperbelpunkte unter gleichen oder supplementären Winkeln. (8a.)

103. Ist $ABCD$ ein Parallelogramm, welches einer gleichseitigen Hyperbel eingeschrieben ist und P ein beliebiger Hyperbelpunkt, so haben die Umkreise der Dreiecke ABP, BCP, CDP, DAP denselben Radius. (102.)

104. *Einen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.*

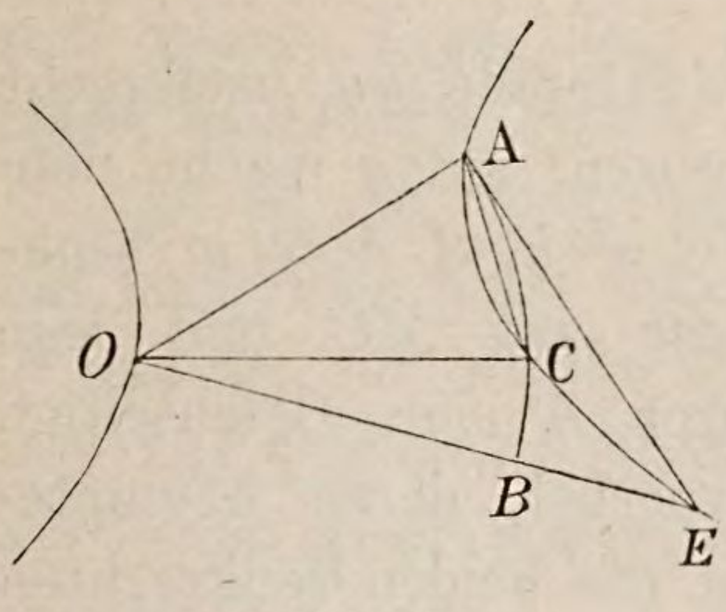

Fig. 39.

Um den Scheitel O beschreibe man mit beliebigem Radius einen Kreis, der die Schenkel in A und B schneidet; auf dem Bogen AB sei C ein solcher Punkt, dafs Bog. $BC = \frac{1}{2}$ Bog. AC.

In A ziehe man an den Kreis die Tangente, welche OB in E trifft, so ist

$$\sphericalangle CAE = \tfrac{1}{2}\, COA = COE.$$

Wenn man also durch OAE eine rechtwinklige Hyperbel konstruiert, welche OA als Durchmesser hat, so mufs sie durch C gehen. (8a.)

II. Eine zweite Auflösung geht aus der folgenden Erwägung hervor.

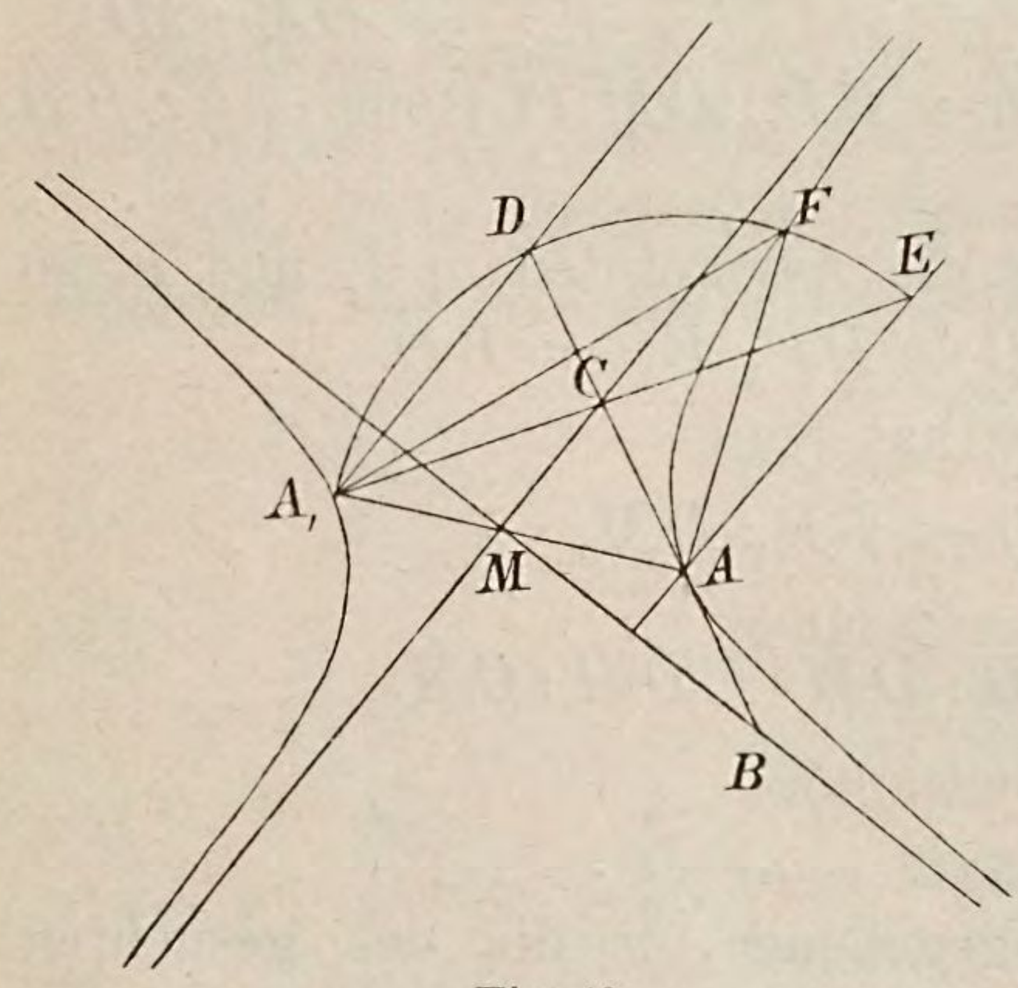

Fig. 40.

In einem Punkte A einer gleichseitigen Hyperbel ziehe man die Tangente, welche die Asymptoten in B und C schneidet, ziehe durch A den Durchmesser AA_1 und durch seine Endpunkte die Parallelen zur Asymptote MC, beschreibe dann um A mit AA_1 den Kreis welcher die Parallelen in D und E, die Hyperbel in F schneidet. Dann ist der Centriwinkel DAF doppelt so grofs als der Peripheriewinkel DA_1F; aber nach 8a. ist

$\sphericalangle AA_1F = DAF$, ferner $\sphericalangle AA_1D = ADA_1 = DAE$, mithin auch $\sphericalangle DAF = 2EAF$. — Da $AC = AM$ ist, so geht die Verlängerung von AC durch D.

Um also $\sphericalangle DAE$ in drei gleiche Teile zu teilen, halbiert man AD in C, macht $AM = AC = AB$, und konstruiert die gleichseitige Hyperbel, welche BC in A berührt und MC, MB zu Asymptoten hat.

105. *Zu zwei Strecken* a *und* b *ein Paar mittlerer Proportionalen zu konstruieren.*

Im Punkte M mögen sich zwei Gerade qq_1 senkrecht kreuzen; auf q mache man $MC = b$, $CA = a$ senkrecht auf MC und lege durch A eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten die beiden senkrechten Geraden durch M sind. Um AMC lege man den Kreis, welcher die Hyperbel noch in B schneiden mag, fälle BD senkrecht auf q_1, so soll

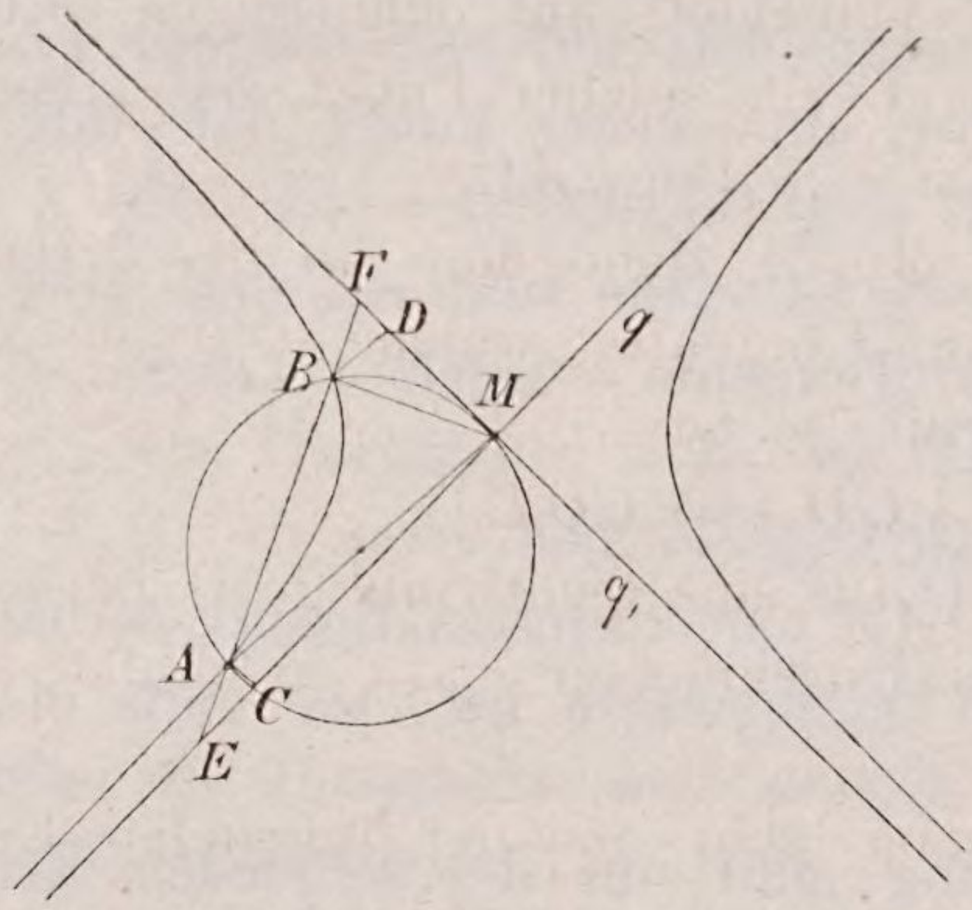

Fig. 41.

$$AC : BD = BD : DM = DM : MC$$

sein. Zunächst ist $AC \,.\, CM = BD \,.\, DM$ (1.) oder $AC : BD = DM : CM$.

Schneidet man mit AB die Asymptoten in E und F, so ist $AE = BF$ (3.), also $AC = DF$, $EC = BD$.

Da $MBF = 90^0$ ist, so hat man

$$DF : BD = BD : DM,$$

also schliefslich

$$AC : BD = BD : DM = DM : CM.$$

106. *Das Delische Problem.*

Einen Würfel zu verdoppeln.

Ist a die Kante des gegebenen, x die des gesuchten Würfels, so soll sein

$$x^3 = 2a^3.$$

Setzt man

$$x^2 = ay, \quad y^2 = 2ax,$$

so ist

$$x^4 = a^2y^2 = 2\,a^3x \text{ und } x^3 = 2\,a^3.$$

Die beiden ersten Gleichungen bringt man in die Form

$$a : x = x : y = y : 2\,a$$

und hat demnach zu a und $2\,a$ ein Paar mittlerer Proportionalen zu konstruieren.

107. *Alle gleichseitigen Hyperbeln, welche denselben Durchmesser* AA_1 *haben, schneiden eine Gerade* g *in Punktpaaren* PQ *von solcher Lage, daſs die Produkte ihrer Entfernungen von einem bestimmten Punkte* R *von* g *einander gleich sind.*

Ist $\mathfrak{A}_1$ der Spiegelpunkt von A_1 bezüglich g, so schneidet ein beliebiger Kreis durch $A\mathfrak{A}_1$ die Gerade g in zwei Punkten P und Q, für welche $\sphericalangle PAQ$ und $P\mathfrak{A}_1Q$, also auch PAQ und PA_1Q gleich oder supplementär sind, also liegen AA_1PQ auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche AA_1 zum Durchmesser hat. (8a.)

Wenn g und $A\mathfrak{A}_1$ sich in R schneiden, so ist

$$RA \,.\, R\mathfrak{A}_1 = RP \,.\, RQ.$$

108. *Eine gleichseitige Hyperbel zu konstruieren, welche einen gegebenen Durchmesser* AA_1 *hat und eine Gerade* g *berührt.*

Man lege durch A und den Spiegelpunkt von A_1 in Bezug auf g einen Kreis, welcher g in P_0 berühren mag; die gleichseitige Hyperbel, welche durch P_0 geht und AA_1 zum Durchmesser hat, berührt g in P_0.

109. *Eine gleichseitige Hyperbel zu konstruieren aus drei Tangenten und dem Berührungspunkte auf einer.*

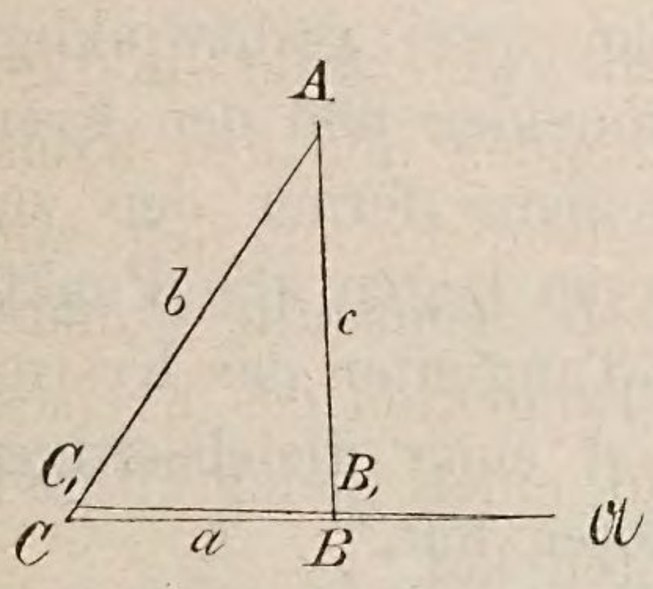

Fig. 42.

Die drei Tangenten seien abc, der Berührungspunkt auf a sei $\mathfrak{A}$. Es mögen sich die Tangenten in ABC schneiden.

Um diese Aufgabe auf 22. zurückzuführen, nehme man an, es fallen in a zwei Tangenten a und a_1 zusammen; ihr Schnittpunkt ist dann der Berührungspunkt $\mathfrak{A}$.

Zur Durchführung der Konstruktion denke man sich durch $\mathfrak{A}$ eine Gerade $\mathfrak{A}B_1C_1$ gelegt und konstruiere die Umkreise

und Höhenpunkte der Dreiecke ABC und $\mathfrak{A}BB_1$ auch für den Fall, dafs B und B_1 zusammenfallen. Man findet den letzteren, wenn man von $\mathfrak{A}$ auf AB die Senkrechte fällt und diese mit der Geraden, welche man in B auf $\mathfrak{A}B$ senkrecht errichten kann, zum Durchschnitte bringt. Um die Höhenpunkte beschreibe man diejenigen beiden Kreise, welche die Umkreise rechtwinklig schneiden. Sie treffen sich in den Mittelpunkten der beiden gleichseitigen Hyperbeln, welche der Aufgabe genügen.

110. *Eine gleichseitige Hyperbel aus 3 Punkten und der Tangente durch einen zu konstruieren.*

Zur Auflösung modifiziere man den Satz 11. auch für den Fall, dafs zwei Ecken eines Dreiecks zusammenfallen und wende 12. an.

111. *Eine gleichseitige Hyperbel aus 2 Punkten und ihren Tangenten zu konstruieren.*

Durch 12. oder 22.

112. *Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel.*

a) Im Endpunkte A_1 einer Strecke AA_1 sei a_1 senkrecht zur Strecke; um A und A_1 drehen sich zwei Gerade x und x_1, welche bezüglich mit AA_1 und a_1 gleiche Winkel bilden, so durchläuft der Schnittpunkt (xx_1) eine gleichseitige Hyperbel.

b) A sei ein Punkt eines Kreises $K^{(2)}$ und AA_1 eine feste Sehne durch ihn; ein Punkt B durchlaufe den Kreis. Dreht man um A eine Gerade x, welche mit AA_1 den Winkel BAA_1 macht, so beschreibt der Schnittpunkt von x und BA_1 eine gleichseitige Hyperbel.

c) An einen Kreis $O^{(2)}$ ziehe man zwei rechtwinklige Tangenten a und a_1, die sich in M schneiden und den Kreis in A und A_1 berühren mögen; man ziehe ferner den zur Sehne AA_1 parallelen Durchmesser m, so liegen alle Punkte und Tangenten, welche die Punkte und Tangenten des Kreises von M und m harmonisch trennen, auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche a und a_1 zu Asymptoten hat.*)

Zwei Kreistangenten mögen a in B und C, a_1 in B_1 und

---

*) cf. Milinowski, Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte, § 11.

C_1 schneiden, so treffen sich AA_1, BB_1, CC_1 in einem Punkte; die Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$, welche je von M und m harmonisch trennen, sind einander parallel; $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ begrenzen also mit a und a_1 Dreiecke von konstantem Inhalte und liegen daher auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche a und a_1 zu Asymptoten hat.

113—120. Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel aus der Geraden.

113. Es seien A und A_1 zwei feste Punkte, $\mathfrak{X}$ ein beliebiger Punkt ihrer Mittelsenkrechten a. Verbindet man diesen mit A und A_1, dreht die Verbindungslinie $A\mathfrak{X}$ um einen konstanten Winkel δ um A und bringt sie in ihrer neuen Lage mit $A_1\mathfrak{X}$ zum Durchschnitte in X, so mufs X eine krumme Linie durchlaufen, wenn $\mathfrak{X}$ sich auf der Mittelsenkrechten a bewegt.

Diese krumme Linie ist eine gleichseitige Hyperbel.

Nimmt $\mathfrak{X}$ die Lagen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ und X die Lagen B und C an, so ist

$$\sphericalangle BAC = BA_1C. \text{ cf. 8a.}$$

114. Man konstruiere die Asymptoten.

115. *Der Höhenpunkt* H *des Dreiecks* ABC *liegt auch auf der gleichseitigen Hyperbel.*

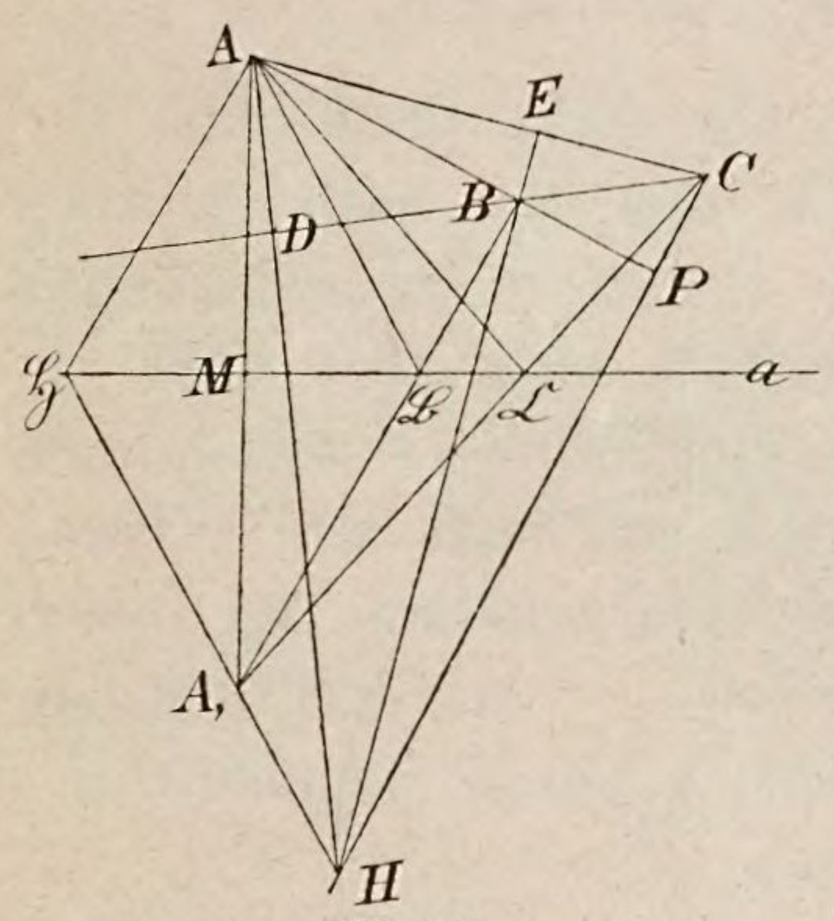

Fig. 43.

Man schneide die Mittelsenkrechte a mit A_1H in $\mathfrak{H}$ und zeige, dafs

$$\sphericalangle \mathfrak{H}AH = \mathfrak{B}AB = \mathfrak{C}AC = \delta$$

ist. Zunächst ist

$$\sphericalangle BAC = BHC,$$

denn beide haben ACH zum Komplementwinkel. Aber

$$\sphericalangle BAC = BA_1C,$$

also auch

$$\sphericalangle BHC = BA_1C$$

und BCA_1H ist ein Kreisviereck, folglich ist:

$$\sphericalangle HA_1C = HBC$$

und mithin:

$$HBC + \mathfrak{H}A_1\mathfrak{C} = HBC + \mathfrak{H}A\mathfrak{C} = 180^0.$$

Weil H Höhenpunkt des Dreiecks ABC ist, so ist auch

$$HBC + HAC = 180^0$$

also:

$$\measuredangle \mathfrak{H}A\mathfrak{C} = HAC$$

und endlich:

$$\measuredangle \mathfrak{H}AH = \mathfrak{C}AC = \delta.$$

116. *Die vier Punkte* BCHA$_1$ *liegen auf einem Kreise.* Denn

$$\measuredangle BA_1C = BAC = BHC.$$

117. *Ist* M *die Mitte von* AA$_1$, *so ist jeder Punkt, der in Bezug auf* M *zu einem Punkte der gleichseitigen Hyperbel symmetrisch liegt, auch ein Punkt derselben.*

118. *Die Verbindungslinie zweier Punkte der Hyperbel, die in Bezug auf* M *symmetrisch liegen, ist ein Durchmesser.*

119. *Die Höhenpunkte* H *und* H$_1$ *der Dreiecke* ABC *und* A$_1$BC *sind die Endpunkte eines Durchmessers.*

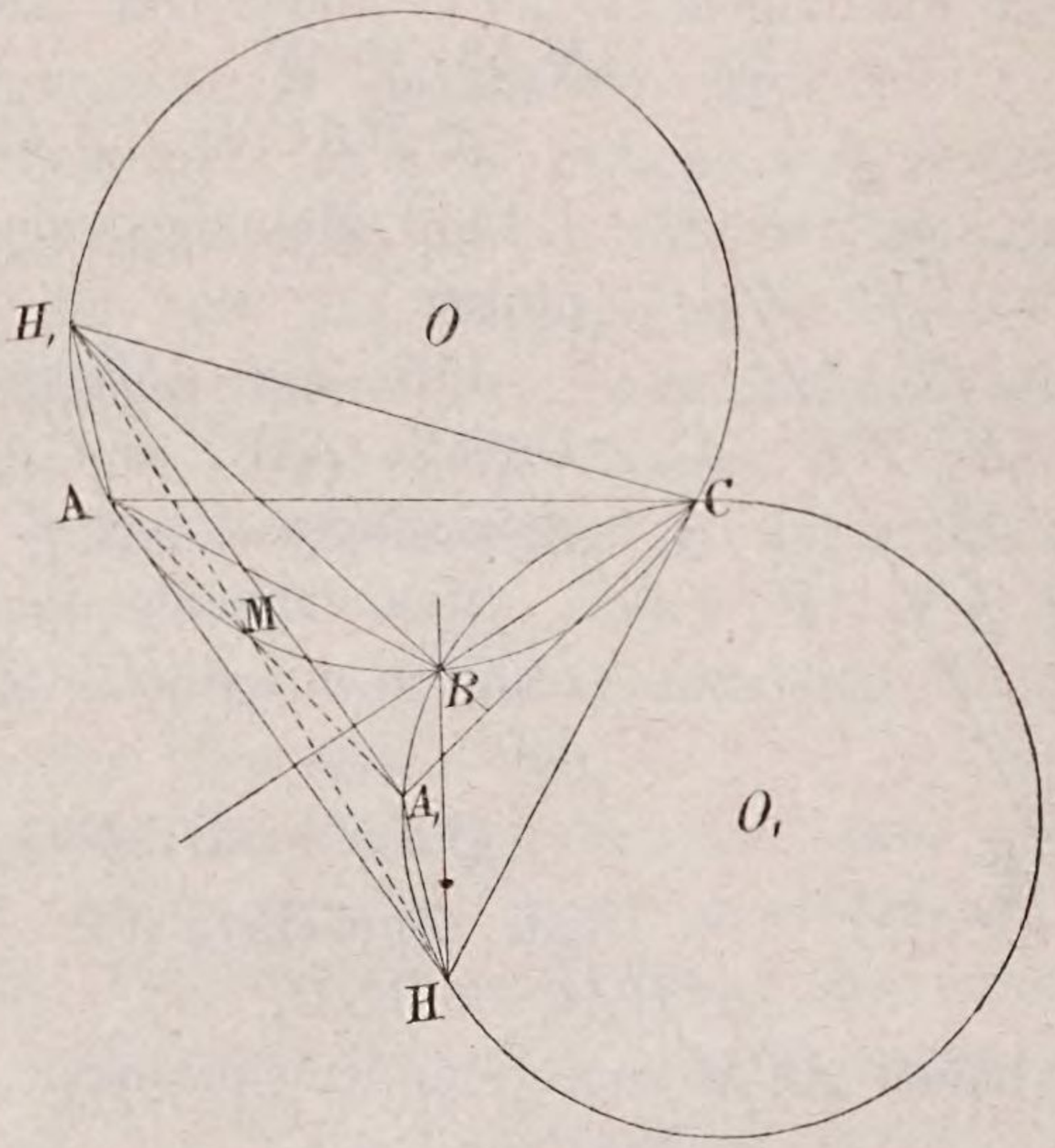

Fig. 44.

Nach 116. liegen A_1BCH und $ABCH_1$ je auf einem Kreise $O^{(2)}$ und $O_1{}^{(2)}$. Deshalb ist

$$\measuredangle A_1HB = A_1CB$$

$$\measuredangle ACB = AH_1B.$$

Weil aber H und H_1 Höhenpunkte der Dreiecke ABC und A_1BC sind, so ist auch

$$\sphericalangle A_1CB = A_1H_1B$$
$$\sphericalangle AHB = ACB.$$

Daher auch:

$$\sphericalangle A_1HB = A_1H_1B$$
$$\sphericalangle AHB = AH_1B$$

und hieraus durch Subtraktion

$$\sphericalangle AHA_1 = AH_1A_1.$$

Weil aber AH und A_1H_1 senkrecht auf BC stehen, also parallel sind, so ist auch

$$AH_1 \parallel A_1H$$

und

$$HM = H_1M.$$

120. *Den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers erscheint jede Sehne unter gleichen oder supplementären Winkeln.*

$$\sphericalangle BHC = BA_1C = BAC = BH_1C.$$

Man kann HH_1 als einen beliebigen Durchmesser betrachten; denn hält man AA_1B fest und läfst C die Hyperbel durchlaufen, so dreht sich HH_1 um CM.

Hält man aber HH_1AA_1 fest und läfst C die Hyperbel durchlaufen, so durchläuft auch der gemeinschaftliche Höhenpunkt C der Dreiecke ABH und A_1BH_1 die Hyperbel; die Sehne BC erscheint aber den Punkten H und H_1 stets unter gleichen Winkeln.

Gelangen B und C etwa nach B' und C', so ist

$$\sphericalangle AHB' = AH_1B'$$

und da

$$\sphericalangle AHB = AH_1B$$

war, so findet man durch Subtraktion

$$\sphericalangle BHB' = BH_1B'$$

und hieraus folgt, dafs jede Sehne den Punkten H und H_1 unter gleichen Winkeln erscheint.

121. *Aus der vergleichenden Erzeugungsart leite man andere Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel ab.*

122. *Auf einem Kreise seien* A, S, S_1, *drei feste Punkte*

und Bogen $AB = AB_1$; *welches ist der Ort des Schnittpunktes* $C = (SB, S_1B_1)$?

123. *Verbindet man die Endpunkte eines Durchmessers einer gleichseitigen Hyperbel mit einem beliebigen Punkte derselben, so ist in dem entstandenen Dreiecke die Differenz der Winkel an dem Durchmesser konstant.*

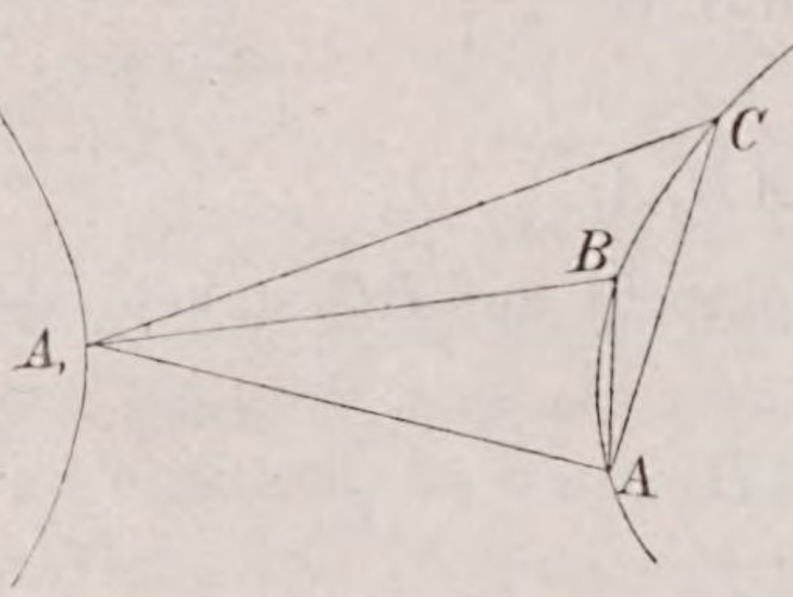

Fig. 45.

Ist AA_1 ein Durchmesser und sind B und C zwei beliebige Punkte der gleichseitigen Hyperbel, so ist

$$\sphericalangle BAC = BA_1C,$$

also

$$BAA_1 - BA_1A = CAA_1 - CA_1A.$$

124. *Der Ort der Spitze eines Dreiecks über gegebener Grundlinie, in welchem die Differenz der Winkel an letzterer konstant ist, ist eine gleichseitige Hyperbel.*

125. *Jeder Kreis durch die Endpunkte eines Durchmessers einer gleichseitigen Hyperbel wird von dieser unter einem Durchmesser von konstanter Richtung geschnitten.*

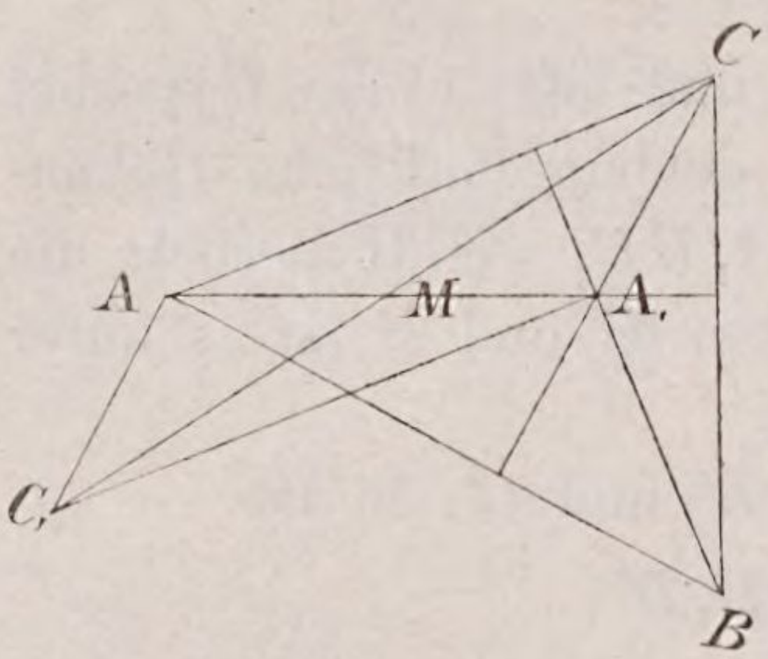

Fig. 46.

AA_1 sei ein Durchmesser, B ein beliebiger Punkt der Hyperbel, C der Höhenpunkt des Dreiecks AA_1B, C_1 der zu ihm diametrale Punkt der Hyperbel.

Da $A_1C \perp AB$ und $A_1C \parallel AC_1$ ist, so mufs auch

$$AC_1 \perp AB, \quad A_1C_1 \perp A_1B$$

sein; also ist BC_1 ein Durchmesser des Kreises, welcher dem Vierecke AA_1BC_1 umgeschrieben werden kann.

Dafs alle Durchmesser parallel sind, folgt aus 10.

126. *Zieht man in allen Kreisen eines Büschels mit den festen Grundpunkten* AA_1 *die zu einer festen Richtung* r *parallelen Durchmesser, so liegen ihre Endpunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche* AA_1 *zum Durchmesser hat.*

Es seien O und O_1 die Mittelpunkte zweier Kreise des Büschels, OB und OB_1 zwei zur festen Richtung r parallele

Radien. Die Verbindungslinie BB_1 geht durch einen Ähnlichkeitspunkt; sie schneide die Kreise noch in C und C_1, so sind die Bogen BC und B_1C_1 ähnlich, also

$$\sphericalangle CAB = C_1AB_1.$$

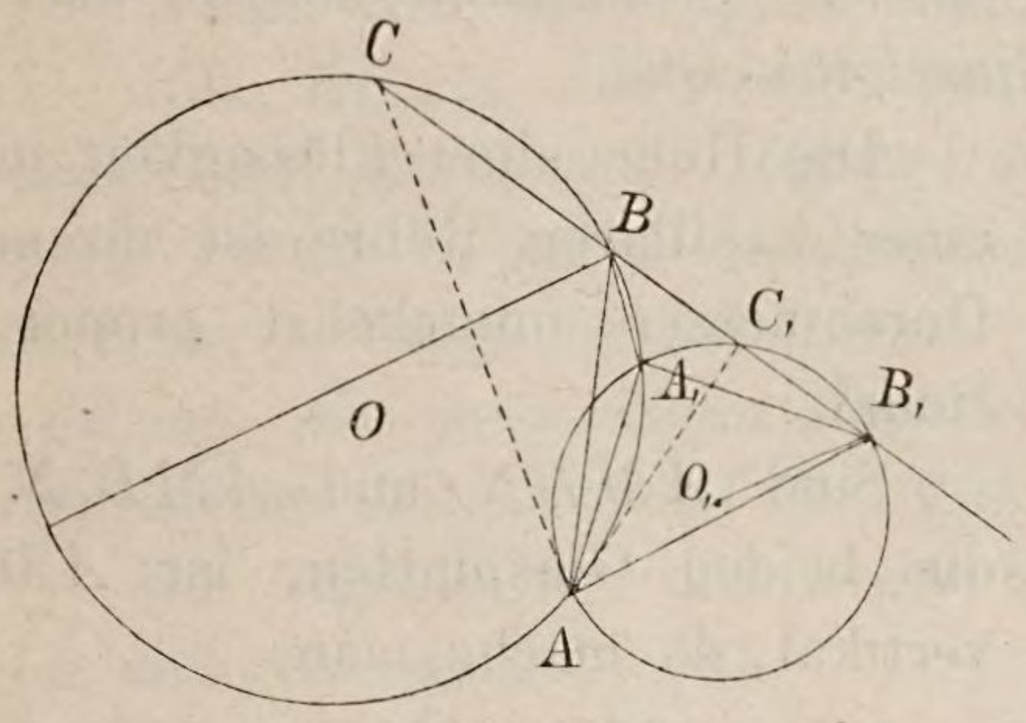

Fig. 47.

Ferner ist

$$\sphericalangle B_1BA_1 = CAA_1,$$
$$BB_1A_1 = A_1AC_1$$

und daher

$$\sphericalangle CAA_1 + C_1AA_1 + BA_1B_1 = 180^0$$

oder auch

$$BAB_1 + BA_1B_1 = 180^0.$$

Deshalb ist der Ort der Punkte BB_1 eine gleichseitige Hyperbel.

127. *Zieht man an die Kreise eines Büschels mit Grundpunkten parallele Tangenten von derselben Richtung, so liegen die Berührungspunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel.*

Folgt aus 126.

128. a) *Zieht man an die Kreise eines Büschels ohne Grundpunkte parallele Tangenten von derselben Richtung, so liegen ihre Berührungspunkte auf einer gleichseitigen Hyperbel.*

Ist $O^{(2)}$ ein Kreis des Büschels und berührt eine Tangente von der festen Richtung r ihn in B, so hat der Radius OB auch eine feste Richtung und berührt einen Kreis $K^{(2)}$ des konjugierten Büschels, der also $O^{(2)}$ in B rechtwinklig schneidet und durch die Punktkreise des gegebenen Büschels geht.

Man erhält also die Berührungspunkte der Kreise des gegebenen Büschels mit den Tangenten von der Richtung r auch als Berührungspunkte der Kreise des konjugierten Büschels mit den Tangenten von der zu r normalen Richtung. Sie liegen also auf einer gleichseitigen Hyperbel.

b) *Die Endpunkte der Durchmesser von einer bestimmten Richtung in einem Kreisbüschel, liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel.*

129. *Zwei vertikale Glasplatten, die unter einem sehr spitzen*

Winkel gegen einander geneigt sind, werden ins Wasser getaucht. Sie werden von diesem längs zweier gleichseitigen Hyperbeln benetzt, deren Asymptoten die vertikale Schnittkante und die horizontalen Grundkanten der Glasplatten sind.

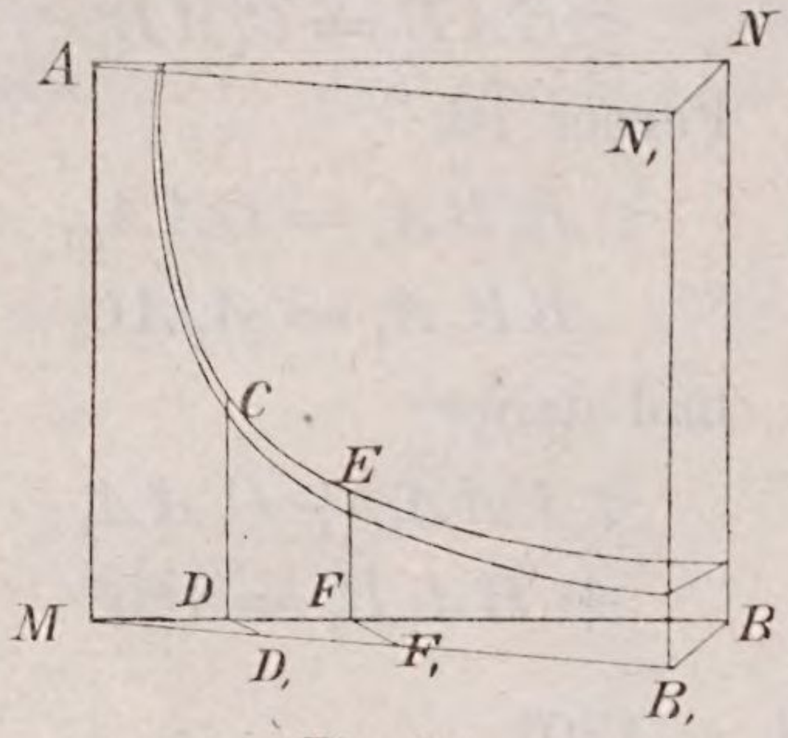

Fig. 47 a.

Die Höhe einer Flüssigkeit in einer kapillaren Röhre ist ihrem Durchmesser umgekehrt proportional.

Sind $AMBN$ und AMB_1N_1 die beiden Glasplatten, ist AM vertikal, so mache man

$$MD = MD_1, \quad MF = MF_1$$

und erhebe in den Punkten D und F die Senkrechten

$$DC \text{ und } FE$$

bis zur Höhe des Wassers, so ist

$$CD : EF = FF_1 : DD_1 = MF : MD$$

also auch:

$$CD \,.\, MD = EF \,.\, MF.$$

Demnach ist das Produkt der Abstände eines Punktes der Schnittkurve der Oberfläche mit der Glasplatte $AMBN$ von den Geraden MA und MB konstant; diese Kurve ist also eine gleichseitige Hyperbel.

---

§. 2. 23—28.

130. *Zwei parallele Tangenten zu konstruieren.*

131. *Auf der Verlängerung einer Strecke* AB *sei* X *ein veränderlicher Punkt; man errichte in ihm die Senkrechte* XY, *so daſs*

$$AX : XY = XY : BX.$$

Welches ist der Ort von Y?

132. Gegeben ein Durchmesser AA_1; man soll diejenige ihm konjugierte Sehne ziehen, welche ihm gleich ist.

133. *Ist AA_1 ein fester Durchmesser eines Kreises, BB_1 eine zu ihm senkrechte, veränderliche Sehne, so durchlaufen die Schnittpunkte (AB, A_1B_1) und (AB_1, A_1B) eine gleichseitige Hyperbel.* (131.)

134. *Diejenigen Tangenten einer gleichseitigen Hyperbel zu konstruieren, welche einer gegebenen Geraden parallel sind.*

Wann wird die Aufgabe unmöglich?

135. *Ist xx_1 ein veränderliches Paar konjugierter Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel $H^{(2)}$ und fällt man aus einem festen Punkte O auf x die Senkrechte s und auf x_1 die Senkrechte s_1, so liegen die Schnittpunkte $X = (xs_1)$ und $X_1 = (x_1 s)$ auch auf einer gleichseitigen Hyperbel $H_1^{(2)}$, welche MO zu einem Durchmesser hat, wenn M der Mittelpunkt von $H^{(2)}$ ist.* (8a.)

Die Asymptoten der einen Hyperbel sind den Achsen der anderen parallel. (8b.)

136. *Zieht man durch zwei feste Punkte O und O_1 Parallelen zu den Paaren konjugierter Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel, so schneiden sich dieselben in den Punkten einer andern gleichseitigen Hyperbel, welche OO_1 zu einem Durchmesser hat.* (8a.) *Beide Hyperbeln haben parallele Asymptoten.* (8b.)

137. *Fällt man aus dem Mittelpunkte M einer gleichseitigen Hyperbel die Senkrechte MC auf die Tangente in einem Punkte B, so werden MB und MC durch die Achsen harmonisch getrennt.*

$\alpha = \gamma$ (24d.), $\beta = \gamma$, also $\alpha = \beta$.

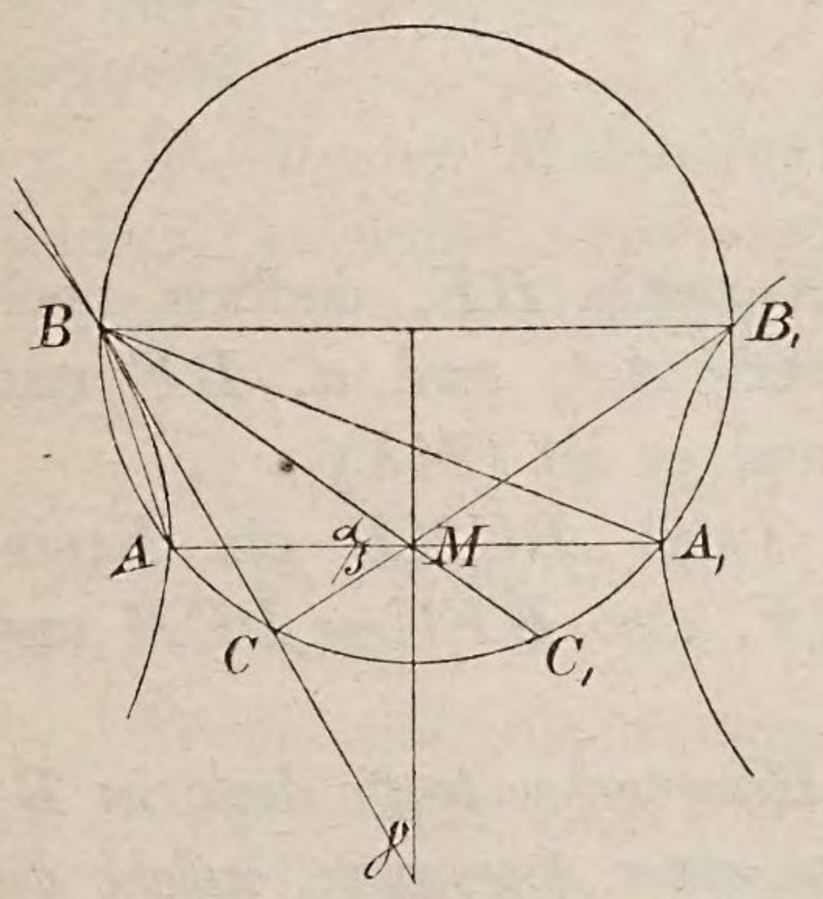

Fig. 48.

138. *Legt man durch die Scheitel der Hauptachse einen Kreis und in einem seiner Schnittpunkte BB_1 mit der gleichseitigen Hyperbel, etwa in B, die Tangente an die letztere, so schneidet sie den Kreis in einem Punkte C, für welchen*

$$\sphericalangle BCM = 90^0.$$

Es ist (Fig. 48)

$$\sphericalangle ABC = A_1BC_1 \text{ (24d. e.)},$$

also Bog. $AC = A_1C_1$ und $\alpha = \beta$.
Aber $\alpha = \gamma$ (24d.), also $BCM = 90^0$.

139. In der vorigen Aufgabe ist

$$\triangle ABM \sim ACM.$$

140. *Jeder Kreis, durch die Scheitel der Hauptachse, wird von der gleichseitigen Hyperbel diametral geschnitten.* (Fig. 48.)

141. *Fällt man aus einem Punkte der gleichseitigen Hyperbel Perpendikel auf zwei konjugierte Durchmesser, so ist die Verbindungslinie der Fußspunkte parallel zur Normale jenes Punktes.*

AA_1 und a seien zwei konjugierte Durchmesser; vom Hyperbelpunkte B fälle man $BC \perp AA_1$, $BD \perp a$, ziehe in

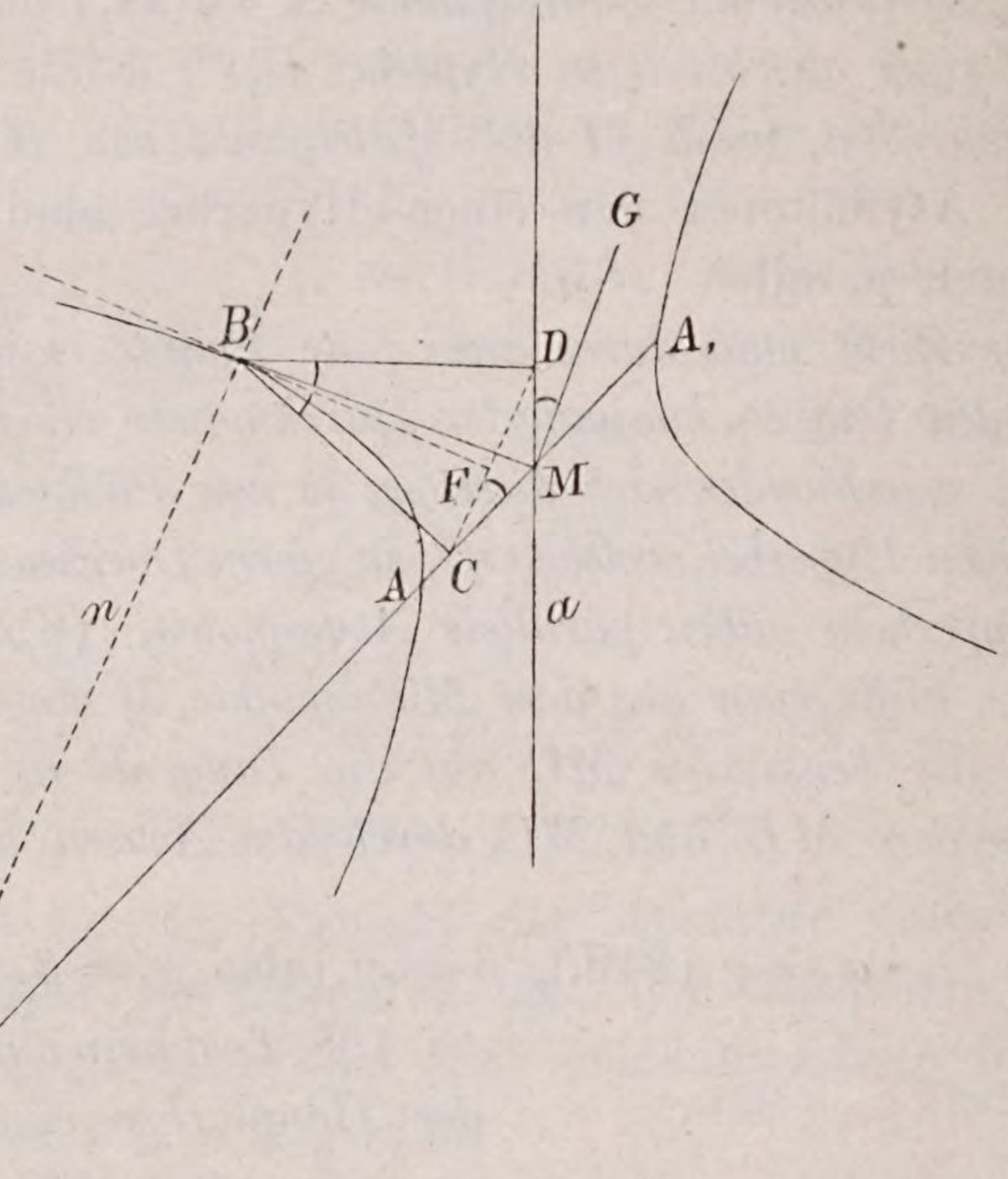

Fig. 49.

B die Tangente BF und die Normale BE, endlich noch $MG \perp BM$. Dann sind konjugiert AA_1 und a, BF und BM, MG und n, BC und BD und es ist (24d.)

$\sphericalangle CBF = DBM = DCM$ (weil $BCMD$ ein Kreisviereck); $\sphericalangle DMG = BEC = CBF$, also $BEC = DCM$ und $CD \parallel n$.

142. *Eine Ordinate CD der Hauptachse treffe diese in B; durch B ziehe man die Parallele zu einer Asymptote, welche die gleichseitige Hyperbel in E trifft, dann ist* (Fig. 50)

$$\triangle MBE = \tfrac{1}{4} BC^2.$$

Fällt man $EF \perp AA_1$, so ist $EF = BF$, also

$$MF^2 - EF^2 = (BM - EF)^2 - EF^2 = a^2$$
$$2BM \,.\, EF = BM^2 - a^2 = BC^2.$$

143. Eine Gerade, die einer Asymptote parallel ist, treffe die gleichseitige Hyperbel in G und eine Ordinate CD der Hauptachse in H, dann ist (Fig. 50)

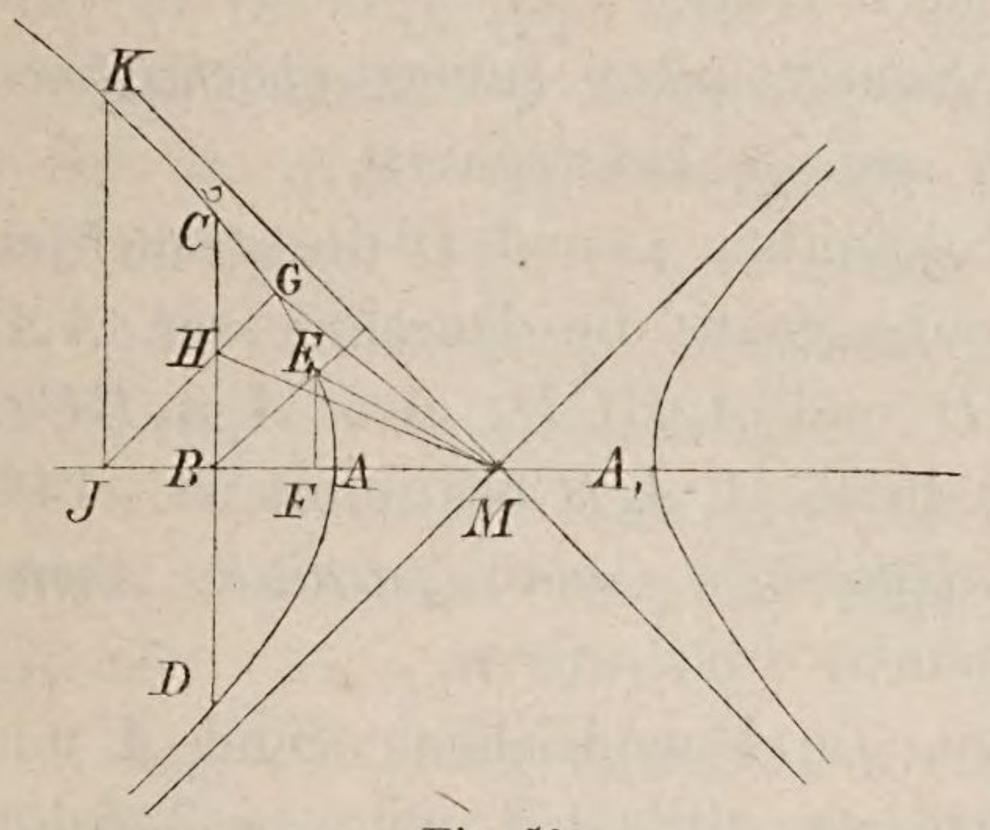

Fig. 50.

$$\triangle MGH = \tfrac{1}{4} CH \,.\, DH.$$

GH schneide die Hauptachse in J, dann ist

$$\triangle MGH = MGJ - MHJ;$$

(27a.).

144. *Wenn man einen Punkt einer gleichseitigen Hyperbel mit den Endpunkten eines Durchmessers verbindet, so begrenzt jede Asymptote auf den Verbindungslinien gleiche Strecken.* (8b. 24e.).

145. *Die Mitten aller Sehnen einer gleichseitigen Hyperbel, welche durch einen Punkt gehen, liegen auch auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche mit der ersten parallele Asymptoten hat.* (24. 136.)

146. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man den Scheitelkreis und einen Punkt P; man soll die Achsen konstruieren.*

Ist M der Mittelpunkt des Scheitelkreises und a sein Radius, so findet man aus den Gleichungen $x^2 + y^2 = MP^2$ und $x^2 - y^2 = a^2$ die Abstände des Punktes P von den Achsen. (27a.)

147. *A und B seien zwei Punkte, a und b ihre Tangenten; die Parallelen durch A und B zu b und a mögen sich in C schneiden. Es liegen $ABCM$ auf einem Kreise.*

Wenn sich die Tangenten in D treffen, so ist $\sphericalangle ADB + AMB = 180^0$, $ADB = ACB$ (24d.)

148. *Durch zwei Punkte A und B einer gleichseitigen Hyperbel ist ein Kreis $O^{(2)}$ gelegt; man soll seine anderen Schnittpunkte mit der Hyperbel bestimmen.*

Sind C und D die gesuchten Schnittpunkte, so ist CD einer bestimmten Richtung r parallel; der ihr konjugierte Durchmesser d ist also auch bekannt; er schneidet CD in

der Mitte E. Ist O der Kreismittelpunkt, so ist $OE \perp r$; der Punkt E ist also derjenige Punkt, in welchem die Normale von O auf r den Durchmesser d trifft.

149. *Man kennt zwei Schnittpunkte zweier gleichseitigen Hyperbeln und soll die beiden anderen konstruieren.*

Es seien A und B die bekannten, C und D die gesuchten Schnittpunkte. Durch A ziehe man die Durchmesser AA_1 und AA_2, so liegen A_1BCD und A_2BCD, also A_1A_2BCD auf einem Kreise. (9d.), der durch A_1A_2B bestimmt ist. 148.

150. *Zwei gleichseitige Hyperbeln haben parallele Asymptoten; man soll ihre Schnittpunkte konstruieren.*

Zwei Schnittpunkte liegen im Unendlichen. Sind A und B die gesuchten Schnittpunkte, so wird AB, wie aus 3. folgt, durch die Centrale der beiden Hyperbeln halbiert; also ist die Richtung von AB bekannt. Denn alle Strecken zwischen den Asymptoten einer Hyperbel, welche durch die Centrale halbiert werden, sind parallel.

Zu dieser bekannten Richtung sei g eine senkrechte Gerade, welche die Hyperbeln in CD und C_1D_1 schneidet; ist dann Q derjenige Punkt auf g, für welchen

$$QC \,.\, QD = QC_1 \,.\, QD_1,$$

so liegt er auf AB. (9c.)

151. *Von einem Punkte P an eine gleichseitige Hyperbel $H^{(2)}$ die Normalen zu konstruieren.*

Ist xx_1 ein Paar konjugierter Durchmesser, so fälle man von P die Geraden s und s_1 senkrecht auf x und x_1; der Ort der Schnittpunkte (xs_1) und (x_1s) ist (135) eine gleichseitige Hyperbel $\mathfrak{H}^{(2)}$, welche $H^{(2)}$ in den Fufspunkten der gesuchten Normalen schneidet.

Q sei einer der Schnittpunkte, t die Tangente durch ihn, q der zu $MQ = q_1$ konjugierte Durchmesser, so mufs $q \parallel t$ sein und da $PQ \perp q$, so mufs auch PQ senkrecht auf t sein.

152. *Durch einen Punkt P an eine gleichseitige Hyperbel die Tangenten zu ziehen.*

Ist xx_1 ein Paar konjugierter Durchmesser, so ziehe man durch P zu ihnen die Parallelen s und s_1; dann ist der Ort der Schnittpunkte (sx_1) und (s_1x) eine andere gleichseitige

Hyperbel, welche mit der ersten parallele Asymptoten hat. (136.) Die endlichen Schnittpunkte beider Hyperbeln sind die gesuchten Berührungspunkte.

Ist nämlich Q einer derselben, t die Tangente in ihm, q der zu $MQ = q_1$ konjugierte Durchmesser, so mufs $q \parallel t$ sein und da $PQ \parallel q$ ist, so fallen t und PQ zusammen.

153. *Harmonische Beziehung zwischen der gleichseitigen Hyperbel und ihrem Scheitelkreise.*

a) *Die gleichseitige Hyperbel und ihr Scheitelkreis werden durch einen Scheitel und die Tangente im anderen harmonisch getrennt.*

AA_1 seien die Scheitel, a_1 die Tangenten in A_1. Eine beliebige Gerade durch A schneide die Hyperbel in B, den Kreis in $\mathfrak{B}$, die Tangente in D. Man fälle BC und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ senkrecht auf AA_1, dann ist nach 26.

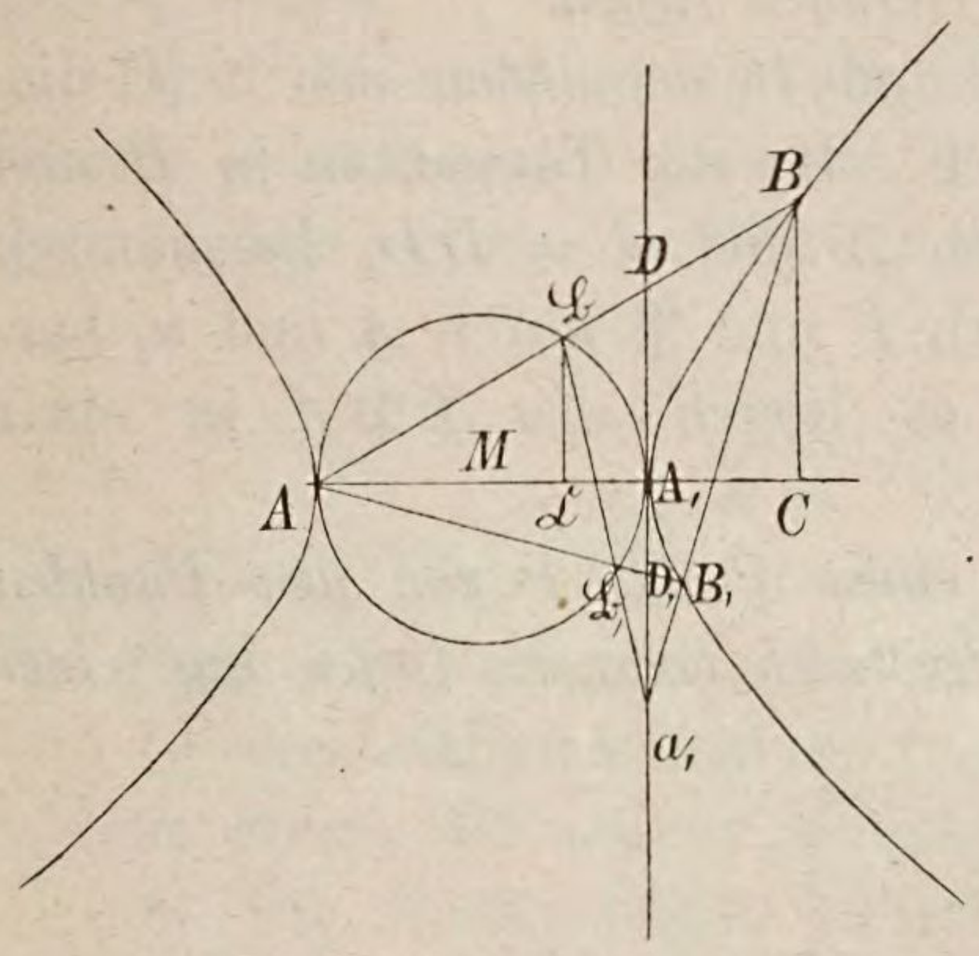

Fig. 51.

$$BC^2 = AC \,.\, A_1C$$
$$\mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 = A\mathfrak{C} \,.\, A_1\mathfrak{C}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Proportion

$$BC^2 : \mathfrak{B}\mathfrak{C}^2 = AC^2 : A\mathfrak{C}^2,$$

so folgt:

$$AC : A\mathfrak{C} = A_1C : A_1\mathfrak{C},$$

also sind

$$AA_1C\mathfrak{C} \text{ und } ADB\mathfrak{B}$$

harmonisch.

b) *Zieht man durch den einen Scheitel einer gleichseitigen Hyperbel zwei Gerade, so schneiden sie diese und den Scheitelkreis in vier Punkten, deren Verbindungslinien sich auf der Tangente des anderen Scheitels treffen und durch diese vom ersten Scheitel harmonisch getrennt werden.*

Da

$$ADB\mathfrak{B} \text{ und } AD_1B_1\mathfrak{B}_1,$$

harmonisch sind, so schneiden sich die Verbindungslinien

BB_1 und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, sowie $B\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}B_1$ auf DD_1,

wie unmittelbar aus den Eigenschaften des vollständigen Vierseits hervorgeht, denn sie werden durch A und DD_1 harmonisch getrennt.

c) *Zieht man durch einen Scheitel der gleichseitigen Hyperbel eine Gerade, so schneidet sie diese und den Scheitelkreis in zwei Punkten, deren Tangenten sich auf der Tangente im anderen Scheitel treffen und durch diese vom ersten Scheitel harmonisch getrennt werden.*

Folgt aus b.

d) *Zieht man durch einen Scheitel der gleichseitigen Hyperbel zwei Gerade, so schneiden sie die Hyperbel und den Scheitelkreis in vier Punkten. Die Tangenten in den Hyperbelpunkten und in den Kreispunkten treffen sich in zwei Punkten, die mit dem Scheitel in einer Geraden liegen.*

Die Tangenten durch B und B_1 schneiden sich in P, diejenigen durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ in $\mathfrak{P}$. Da die Tangenten in B und $\mathfrak{B}$, sowie in B_1 und $\mathfrak{B}_1$ durch A und $a_1 = DD_1$ harmonisch getrennt sind, so müssen auch P und $\mathfrak{P}$ durch A und a_1 harmonisch getrennt werden; es liegen also $P\mathfrak{P}A$ in einer Geraden.

e) *Alle Punkte, welche einen Punkt P von den Punkten der gleichseitigen Hyperbel harmonisch trennen, liegen auf einer Geraden p.*

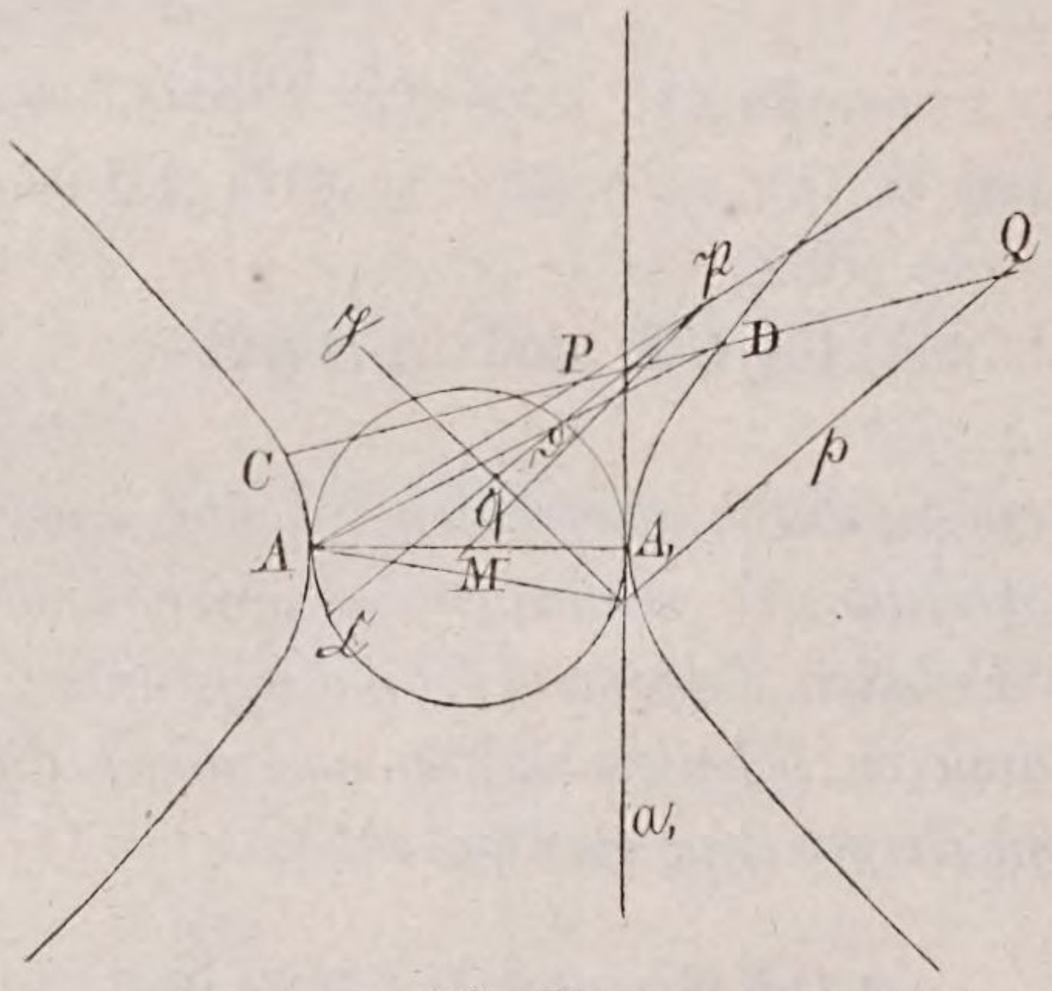

Fig. 52.

P und p heifsen *Pol* und *Polare*.

Man konstruiere denjenigen Punkt $\mathfrak{P}$, welcher P von A

und a_1 harmonisch trennt, darauf die Polare $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Scheitelkreis und diejenige Gerade p, welche $\mathfrak{p}$ von A und a_1 harmonisch trennt.

Eine beliebige Gerade $\mathfrak{g}$ durch $\mathfrak{P}$ schneide $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{Q}$, den Kreis in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$; sind dann Q, C, D diejenigen Punkte, welche $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ von A und a_1 harmonisch trennen, so liegen alle drei mit P in derjenigen Geraden g, welche $\mathfrak{g}$ von A und a_1 harmonisch trennt, und weil $A(\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\mathfrak{C}\mathfrak{D})$ harmonisch sind, so sind auch $PQCD$ harmonisch.

Da aber Q von $\mathfrak{Q}$, p von $\mathfrak{p}$ durch A und a_1 harmonisch getrennt sind und $\mathfrak{Q}$ auf $\mathfrak{p}$ liegt, so mufs Q auf p liegen.

Weil ferner C und D von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ durch A und a_1 harmonisch getrennt sind, so müssen C und D auf der Hyperbel liegen.

Es werden demnach die Hyperbelpunkte C und D von P und p harmonisch getrennt.

f) Die weitere Ausführung dieses Satzes suche man in § 4.

---

§ 3. 29—36.

154. *a*) Die zur Hauptachse senkrechte Brennpunktssehne, der Parameter, ist gleich der Hauptachse.

b) die Leitlinien begrenzen auf den Asymptoten Strecken, welche gleich der halben Hauptachse sind.

c) Die Entfernungen zwischen einem Brennpunkte und den Schnittpunkten seiner Leitlinie mit den Asymptoten sind gleich der halben Hauptachse.

d) Die Entfernungen des Mittelpunktes von denjenigen Punkten, in denen die Leitlinien die Asymptoten schneiden, sind gleich der halben Hauptachse.

e) Wenn man um einen Brennpunkt mit dem halben Parameter oder der halben Hauptachse einen Kreis, den *Parameterkreis*, beschreibt, so berührt er die Asymptoten.

f) der Scheitelkreis geht durch diejenigen Punkte, in denen der Parameterkreis die Asymptoten berührt.

155. *Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel aus dem Kreise.*

a) Um einen Punkt B sei mit dem Radius a ein Kreis

$B^{(2)}$ gezeichnet und durch ihn eine solche Gerade l gelegt, auf welcher der Kreis die Seite des eingeschriebenen Quadrates abschneidet. Auf diese sei BC senkrecht gefällt.

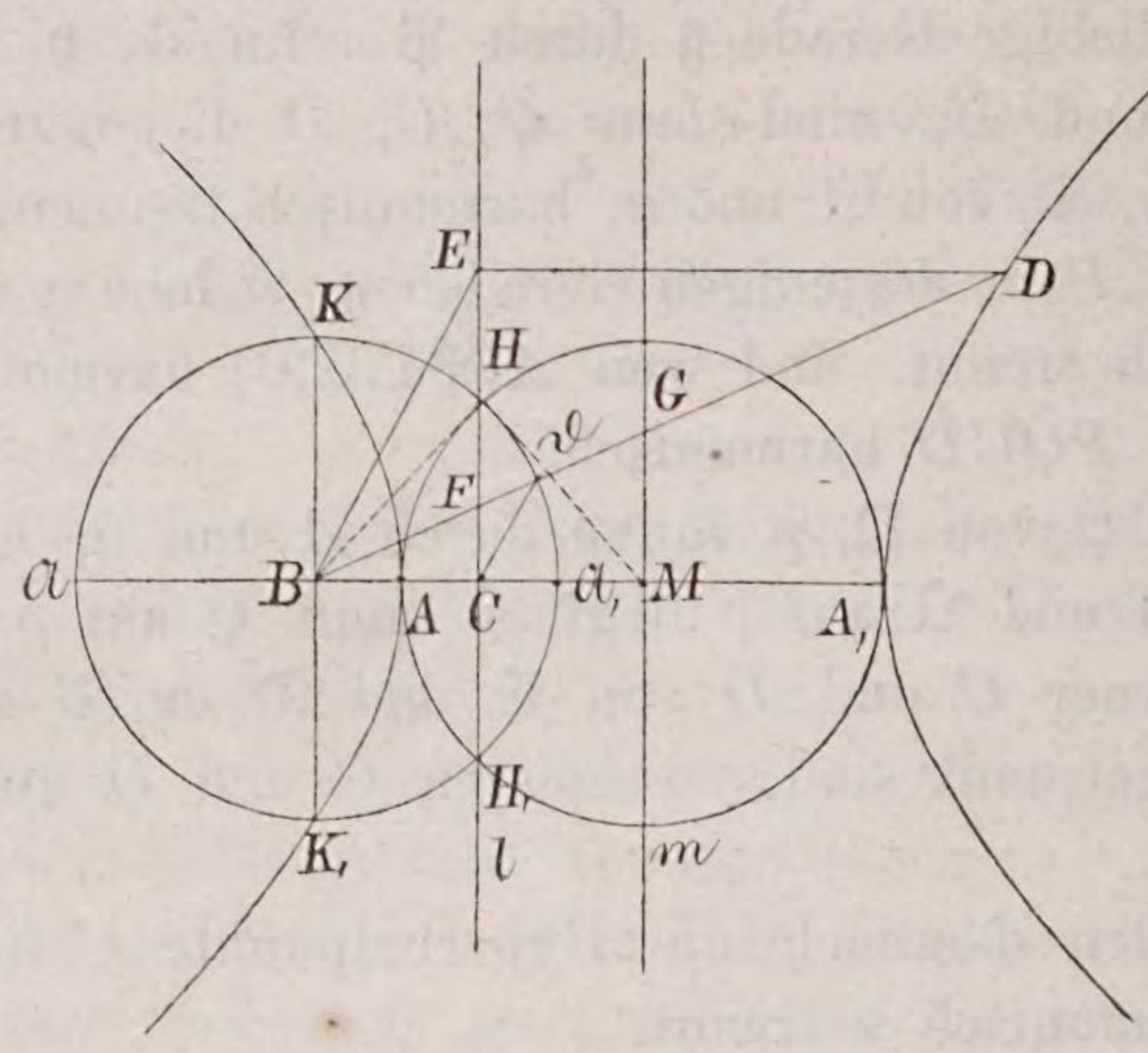

Fig. 52 a.

Ist $\mathfrak{D}$ ein beliebiger Punkt des Kreises, so ziehe man $C\mathfrak{D}$ und $BE \parallel C\mathfrak{D}$, errichte in E auf l die Senkrechte und schneide sie mit $B\mathfrak{D}$ in D.

Der Ort von D ist eine gleichseitige Hyperbel $H^{(2)}$, für welche B und l Brennpunkt und Leitlinie sind.

Aus den ähnlichen Dreiecken $BC\mathfrak{D}$ und BED folgt nämlich

$$DB : DE = B\mathfrak{D} : BC.$$

Die Abstände des Punktes D von B und l verhalten sich somit zu einander, wie die Diagonale eines Quadrates zu ihrer Seite.

b) Macht man $CM = CB$ und errichtet auf BM in M die Senkrechte m, so trennt sie den Kreis $B^{(2)}$ und die Hyperbel harmonisch von B.

Die Geraden l und m mögen von AD in F und G geschnitten werden, dann ist

$$BF = FG.$$

Aus ähnlichen Dreiecken ergeben sich die Proportionen:

$$B\mathfrak{D} : BC = BD : DE$$

$$BC : BF = DE : DF$$

und aus beiden folgt durch Multiplikation:

$$B\mathfrak{D} : BF = BD : DF.$$

Hieraus durch bekannte Umformung, wenn man

$$B\mathfrak{D} - BF = \mathfrak{D}F, \quad BD - DF = BF$$

setzt,

$$\mathfrak{D}F : B\mathfrak{D} = BF : BD.$$

Multipliziert man diese Proportion mit der dritten, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{D}F : BF = BF : DF$$

$$BF^2 = \mathfrak{D}F \,.\, DF.$$

Somit folgt, dafs $BG\mathfrak{D}D$ harmonische Punkte sind.

c) Die Schnittpunkte von l und $B^{(2)}$ seien H und H_1, dann ist

$$BH = MH = a$$

$$\sphericalangle BHM = 90^0.$$

Um M beschreibe man mit MH den Kreis $M^{(2)}$, welcher $B^{(2)}$ in H und H_1 rechtwinklig schneidet.

Die Centrale BM treffe

$$B^{(2)} \text{ in } \mathfrak{A} \text{ und } \mathfrak{A}_1, \quad M^{(2)} \text{ in } A \text{ und } A_1.$$

Man hat dann:

$$MA^2 = MH^2 = MC \,.\, MB,$$

also sind B und C durch A und A_1 harmonisch getrennt.

Ferner ist:

$$CB^2 = CH^2 = CA \,.\, CA_1 = CA \,.\, C\mathfrak{A} = CA_1 \,.\, C\mathfrak{A}_1,$$

also sind A und $\mathfrak{A}$, A_1 und $\mathfrak{A}_1$ durch B und M harmonisch getrennt.

Die Punkte A und A_1 sind die Scheitel der gleichseitigen Hyperbel, M ist ihr Mittelpunkt, m die Nebenachse.

Wenn der Punkt $\mathfrak{D}$ den Kreis durchläuft, so durchläuft D die Hyperbel; gelangt $\mathfrak{D}$ nach H oder H_1, so kommt D ins Unendliche. Weil:

$$\sphericalangle HBH_1 = 90^0,$$

so folgt, *dafs die unendlich fernen Punkte in zwei zu einander senkrechten Richtungen liegen.*

Die Senkrechte in B auf der Hauptachse treffe den Kreis $B^{(2)}$ in K und K_1; es schneiden sich BK und m im Unendlichen in B_∞, also sind $KK_1 B B_\infty$ harmonisch und KK_1 sind die Schnittpunkte von $B^{(2)}$ und $H^{(2)}$. Die Sehne KK_1 ist also der Parameter der gleichseitigen Hyperbel. Man hat also den Satz:

Eine gleichseitige Hyperbel und ein Parameterkreis derselben werden durch den Brennpunkt des letzteren und die Nebenachse harmonisch getrennt.

Aus diesem Satze ergeben sich in einfachster Weise gleichzeitig die Polar- und Brennpunktseigenschaften der gleichseitigen Hyperbel.*)

156. a) Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man die Brennpunkte; man soll die Hauptachse konstruieren.

b) Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man den Scheitelkreis und eine Gerade durch einen Brennpunkt (29 b).

c) Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man den Scheitelkreis und einen Punkt einer Leitlinie (36 b).

157. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man die Brennpunkte B und B_1; man soll durch einen gegebenen Punkt die Tangenten konstruieren.*

I. Man erhält die Berührungspunkte, wenn man den gegebenen Punkt mit einem Brennpunkte verbindet, über der Verbindungslinie als Durchmesser einen Kreis beschreibt und mit ihm den Scheitelkreis schneidet (35).

II. Ist P der gegebene Punkt, so beschreibe man um P mit PB und um B_1 mit der Hauptachse einen Kreis; beide Kreise schneiden sich in den Gegenpunkten von B in Bezug auf die gesuchten Tangenten (33).

158—161. Die Vektorenkreise.**)

158. *Verbindet man die beiden Brennpunkte einer gleichseitigen Hyperbel mit zwei Punkten derselben, so läfst sich in das entstandene Viereck ein Kreis zeichnen.*

---

*) cf. Milinowski. Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. §§ 7, 11, 12, 13, 15.

**) Haase. Zur elementaren Behandlung der Kegelschnitte. Blätter für das Bairische Realschulwesen. 1883.

Die Brennpunkte B und B_1 verbinde man mit den Hyperbelpunkten C und D; dann ist

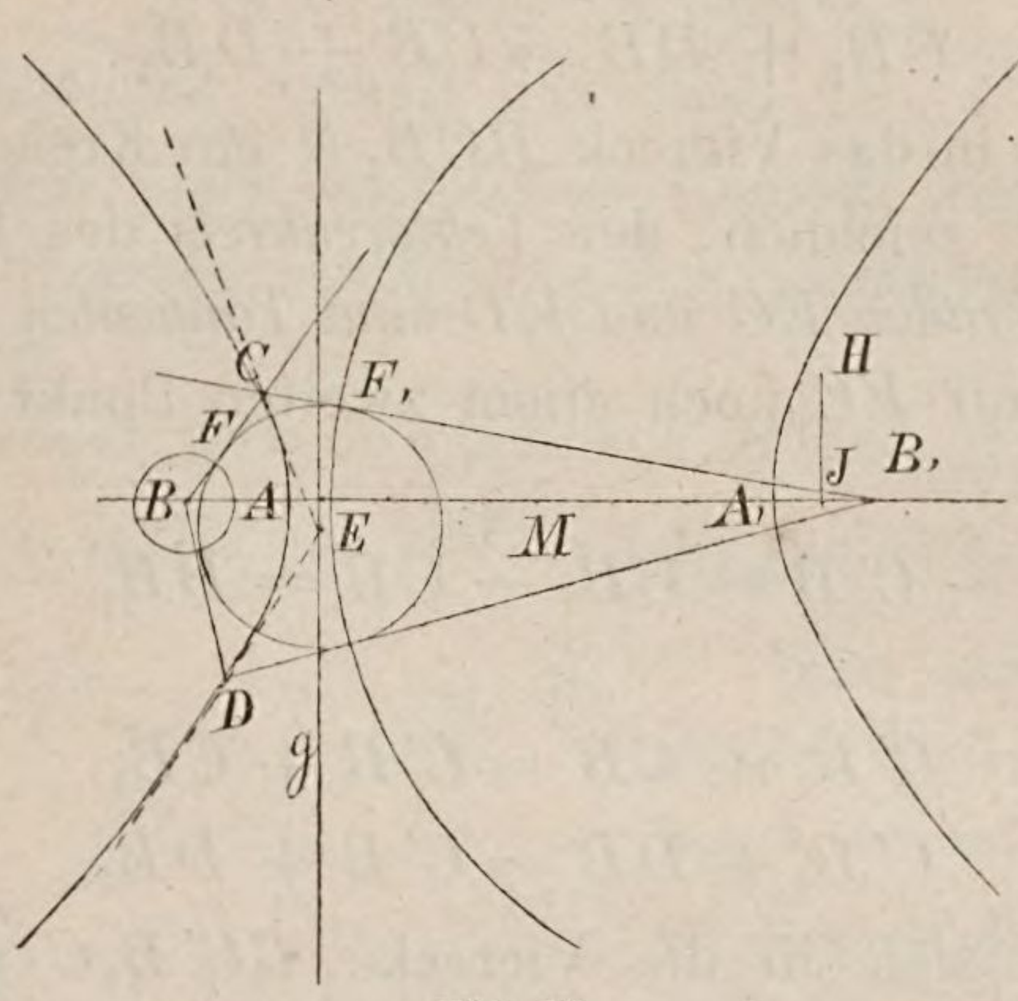

Fig. 53.

$$CB_1 - CB = DB_1 - DB$$

oder

$$CB_1 + DB = DB_1 + CB.$$

Mithin läfst sich in das Viereck BCB_1D ein Kreis zeichnen.

Dieser soll, weil er die Leitstrahlen oder Radienvektoren der Punkte C und D berührt, ein *Vektorenkreis* heifsen.

Da die Tangenten in C und D die Winkel BCB_1 und BDB_1 halbieren, so müssen sie sich im Mittelpunkte E jenes Kreises treffen und deshalb heifst dieser der Vektorenkreis des Punktes E.

159. *Erzeugung der gleichseitigen Hyperbel mittelst der Brennpunkte.*

a) *Gegeben ist eine Strecke $BB_1 = 2c$ und auf ihr symmetrisch zu den Endpunkten die Strecke $AA_1 = 2a$ und zwar verhält sich $2a : 2c$, wie die Seite eines Quadrates zu ihrer Diagonale. Man soll den Ort des Punktes X untersuchen, für den*

$$XB_1 - XB = 2a$$

ist.

Die Punkte A und A_1, welche der Bedingung

$$AB_1 - AB = A_1B - A_1B_1 = 2a$$

genügen, heifsen die Scheitel des Ortes $H^{(2)}$; B und B_1 seine Brennpunkte.

Sind C und D irgend zwei andere Punkte des Ortes, so ist

$$CB_1 + DB = CB + DB_1,$$

also läfst sich in das Viereck BCB_1D ein Kreis $E^{(2)}$ mit dem Mittelpunkte E zeichnen, der *Vektorenkreis* des Punktes E.

b) *Die Geraden EC und ED sind Tangenten des Ortes $H^{(2)}$*

Gäbe es auf EC noch einen zweiten Punkt C' des Ortes, so wäre

$$C'B_1 - C'B = CB_1 - CB = DB_1 - DB$$

also auch:

$$C'B_1 + CB = C'B + CB_1$$
$$C'B_1 + DB = C'B + DB_1$$

und es liefsen sich in die Vierecke $BC'B_1C$ und $BC'B_1D$ Kreise zeichnen.

Der Mittelpunkt des Kreises, welcher sich in $BC'B_1C$ zeichnen liefse, müfste auf CC' liegen, denn diese Linie halbiert den Winkel BCB_1 und geht durch C', also müfste sie auch den Winkel $BC'B_1$ halbieren und E wäre der Mittelpunkt des Kreises, welcher sich dem Vierecke $BC'B_1D$ einzeichnen liefse. Da dies unmöglich ist, so mufs C' mit C zusammenfallen und BC berührt den Ort $H^{(2)}$ in C, ebenso BD in D.

c) Hieraus folgt der Satz:

Die Tangente in einem Punkte von $H^{(2)}$ halbiert den Winkel seiner Brennpunktsstrahlen.

d) Da ferner $\sphericalangle CBE = DBE$ ist, so ergiebt sich weiter:

Verbindet man einen Brennpunkt mit den Berührungspunkten und dem Schnittpunkte zweier Tangenten, so halbiert die letzte Verbindungslinie den von den beiden ersten gebildeten Winkel.

e) *Verbindet man einen Brennpunkt mit dem Schnittpunkte der Tangenten in den Endpunkten einer durch ihn gezogenen Sehne, so steht die Verbindungslinie auf der Sehne senkrecht.*

Folgt aus d.

f) Schneidet eine dritte Tangente CE in C_1, DE in D_1 und berührt in F, so ist nach c.

$$\sphericalangle CBC_1 = C_1BF, \quad \sphericalangle DBD_1 = D_1BF,$$

also auch durch Addition:

$$\sphericalangle C_1 B D_1 = \tfrac{1}{2} C B D.$$

Diese Gleichung enthält den Satz:

Jede Strecke einer beweglichen Tangente von $H^{(2)}$ zwischen zwei festen Tangenten erscheint jedem Brennpunkte unter konstantem Winkel.

g) Verbindet man E noch mit B und B_1, so ist

$$\sphericalangle BEC + B_1 ED = 180^0 - (\beta+\gamma) + 180^0 - (\beta_1 + \delta).$$

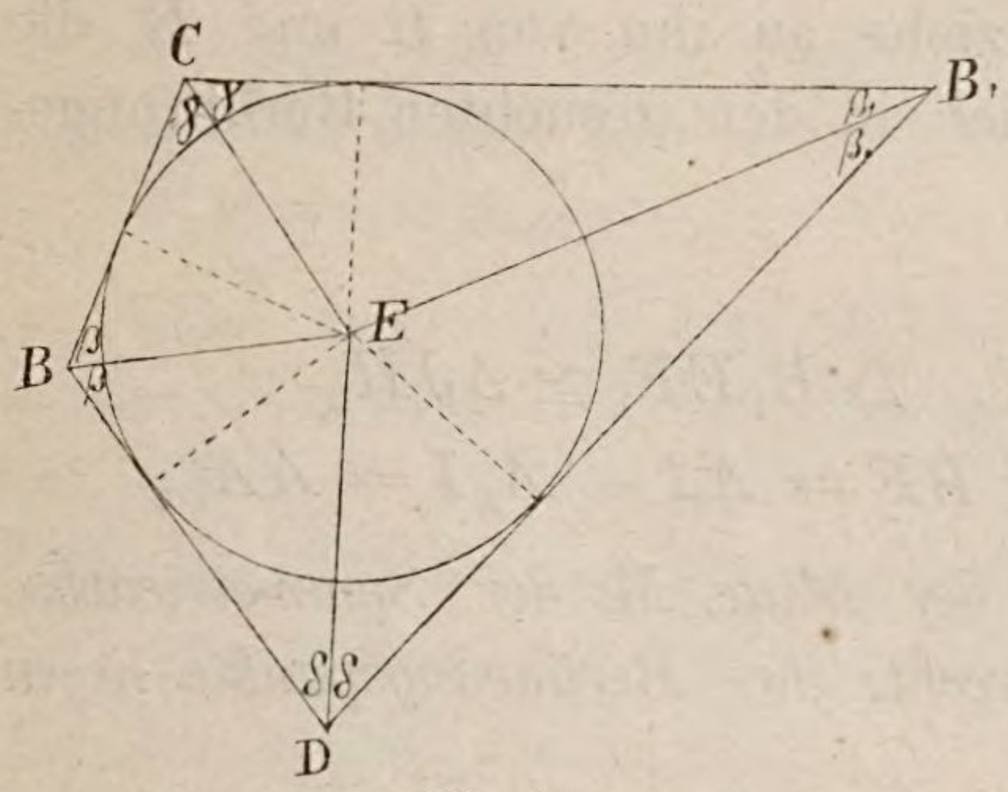

Fig. 54.

Weil aber die Winkelsumme im Vierecke 360^0 beträgt, so ist

$$\beta + \gamma + \beta_1 + \delta = 180^0,$$

also auch:

$$\sphericalangle BEC + B_1 ED = 180^0.$$

In Worten:

Wenn von einem Punkte zwei Tangenten an denselben Zweig einer gleichseitigen Hyperbel gehen und man verbindet diesen Punkt mit den beiden Brennpunkten, so bilden diese Verbindungslinien mit den Tangenten supplementäre Winkel; sie bilden gleiche Winkel, wenn die Tangenten an beide Zweige gehen.

Zum Beweise des zweiten Teiles ist, weil

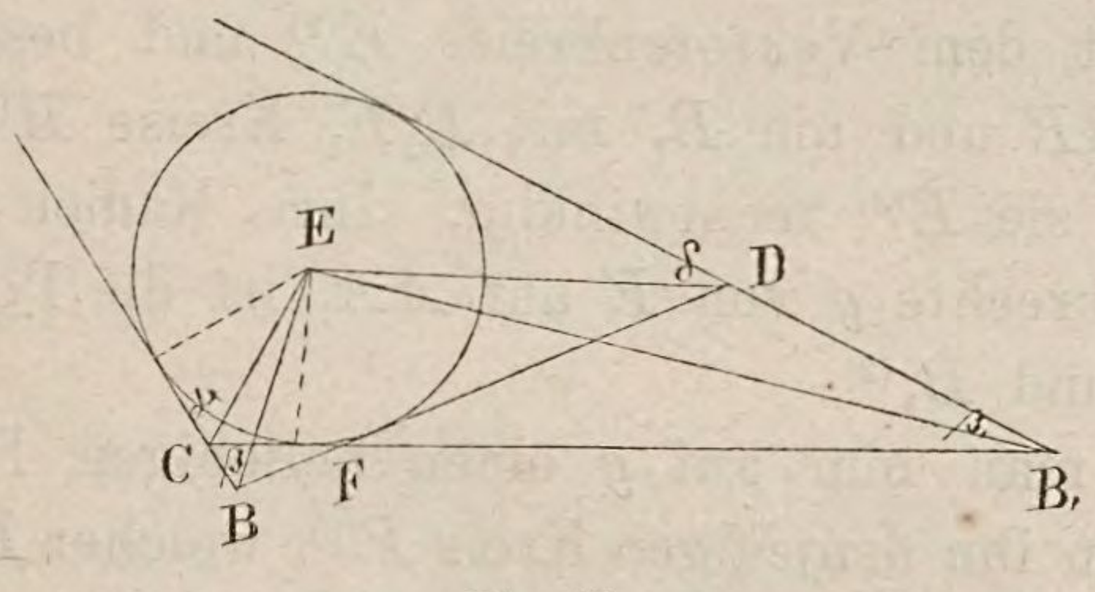

Fig. 55.

die Winkel in den Dreiecken BCF und $B_1 DF$ einander gleich sind,

$$\sphericalangle CBF + BCF = DB_1 F + B_1 DF,$$

oder:

$$2\beta + 180^0 - 2\gamma = 2\beta_1 + 180^0 - 2\delta,$$

daher auch:

$$\gamma - \beta = \delta - \beta_1,$$

oder endlich:

$$\sphericalangle BEC = B_1ED.$$

h) *Von einem Punkte E an die Kurve $H^{(2)}$ die Tangenten zu ziehen* (Fig. 53).

Man beschreibe um A_1 und A Kreise mit EB und EB_1, die sich in H treffen mögen, fälle $HI \perp BB_1$, beschreibe um E mit HI den Kreis und ziehe an ihn von B und B_1 die Tangenten. Sie schneiden sich in den gesuchten Berührungspunkten C und D.

Es ist nämlich

$$\triangle BEF \cong A_1IH, \quad \triangle B_1EF_1 \cong AJH,$$

$$B_1C - BC = B_1F_1 - BF = AI - A_1I = AA_1.$$

i) *Die Tangenten aus der Mitte M der Symmetrieachse AA_1 stehen aufeinander senkrecht; ihre Berührungspunkte liegen im Unendlichen.*

Folgt aus h, weil sich $AA_1 : BB_1$, wie die Seite eines Quadrats zur Diagonale verhält.

$H^{(2)}$ hat also zwei rechtwinklige Asymptoten.

160. a) *Die Vektorenkreise aller Punkte einer zur Symmetrieachse senkrechten Geraden bilden ein Büschel* (Fig. 53).

Sind F und F_1 die Berührungspunkte der Geraden BC und B_1C mit dem Vektorenkreise $E^{(2)}$ und beschreibt man um B mit BF und um B_1 mit B_1F_1 Kreise $B^{(2)}$ und $B_1{}^{(2)}$, so schneiden sie $E^{(2)}$ rechtwinklig. Ihre Radien seien r und r_1. Die Senkrechte g von E auf AA_1 ist die Potenzlinie der Kreise $B^{(2)}$ und $B_1{}^{(2)}$.

Nimmt man nun auf g einen beliebigen Punkt P und beschreibt um ihn denjenigen Kreis $P^{(2)}$, welcher $B^{(2)}$ und $B_1{}^{(2)}$ rechtwinklig schneidet, verbindet B und B_1 mit zwei Schnittpunkten Q und Q_1, die auf derselben Seite der Symmetrieachse AA_1 liegen, bis sich die Verbindungslinien in R schneiden, so ist

$$RB_1 - RB = r_1 - r = AA_1,$$

also ist R ein Punkt der Kurve $H^{(2)}$.

Sind $Q'Q_1'$ die anderen Schnittpunkte des Kreises $P^{(2)}$ mit $B^{(2)}$ und $B_1{}^{(2)}$ und schneiden sich BQ' und B_1Q_1' in R_1', so ist auch R_1' ein Punkt von $H^{(2)}$ und $P^{(2)}$ ein Vektorenkreis. Demnach sind alle Kreise, welche $B^{(2)}$ und $B_1{}^{(2)}$ rechtwinklig schneiden, Vektorenkreise und bilden ein Büschel.

Weil es aber um jeden Punkt nur einen Vektorenkreis giebt, so gehören alle Vektorenkreise der Punkte von g dem Kreisbüschel an, dessen Kreise $B^{(2)}$ und $B_1{}^{(2)}$ rechtwinklig schneiden.

b) Für jede zur Symmetrieachse senkrechte Gerade g ändern die Kreise $B^{(2)}$ und $B_1{}^{(2)}$ ihre Gröfse, die Differenz $r_1 - r$ ihrer Radien bleibt aber konstant gleich $AA_1 = 2a$.

Setzt man $r = 0$ und daher $r_1 = 2a$, so degeneriert $B^{(2)}$ in den Punktkreis B und $B_1{}^{(2)}$ erhält den Radius $2a$. Die Potenzlinie l der Kreise B und $B_1{}^{(2)}$ nennt man in diesem Falle die *Leitlinie* des Brennpunktes B. — Aus a. folgt sofort:

Alle Vektorenkreise der Punkte einer Leitlinie gehen durch den Brennpunkt der letzteren.

c) In diesem Falle müssen die beiden Seiten BC und BD des dem Vektorenkreise umgeschriebenen Vierecks BCB_1D,

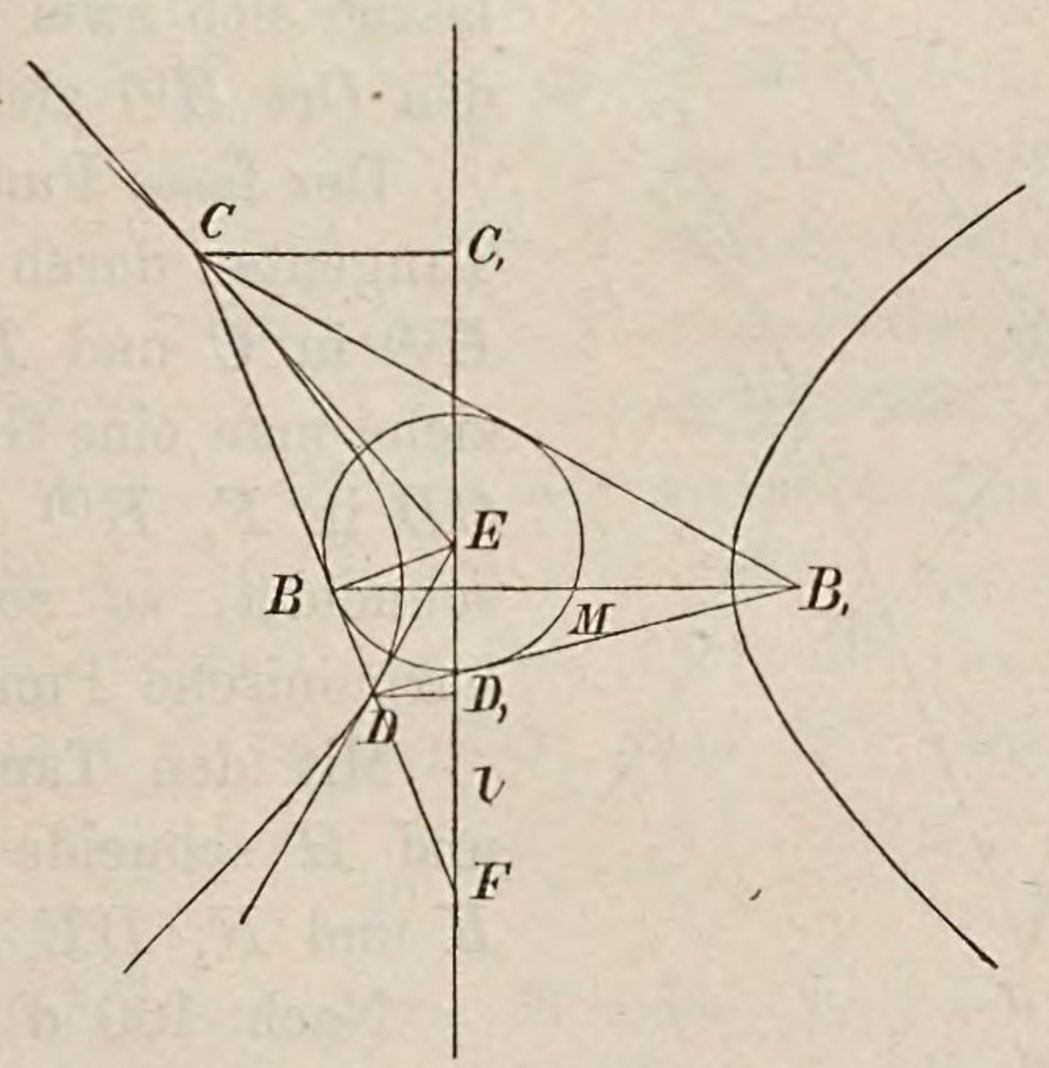

Fig. 56.

welche durch B gehen, zusammenfallen und BE mufs auf CD senkrecht stehen. (cf. 159 e.)

Hieraus folgt:

Die Schnittpunkte der Tangenten in den Endpunkten einer Sehne durch einen Brennpunkt liegen auf einer festen Geraden, der Leitlinie dieses Brennpunktes.

d) *Die Vektorenkreise aller Punkte einer Tangente des Ortes $H^{(2)}$ haben den Berührungspunkt der letzteren zu einem gemeinschaftlichen Ähnlichkeitspunkt.*

Denn sie berühren die Brennpunktsstrahlen des Berührungspunktes.

e) *Nimmt man auf den Tangenten zweier Punkte C und D des Ortes $H^{(2)}$ zwei beliebige Punkte P und Q, so liegt ein Ähnlichkeitspunkt der Vektorenkreise $P^{(2)}$ und $Q^{(2)}$ auf CD.*

Ist E der Schnittpunkt der Tangenten in C und D, $E^{(2)}$ sein Vektorenkreis, so müssen nach dem Lehrsatze von Monge viermal drei Ähnlichkeitspunkte der Kreise $E^{(2)}\,P^{(2)}\,Q^{(2)}$ in einer Geraden liegen. — Nun sind aber C und D Ähnlichkeitspunkte (d) der Kreispaare $E^{(2)}\,P^{(2)}$ und $E^{(2)}\,Q^{(2)}$, also mufs ein Ähnlichkeitspunkt von $P^{(2)}$ und $Q^{(2)}$ auf CD liegen.

161. *Alle Punkte, welche einen festen Punkt von dem Orte $H^{(2)}$ harmonisch trennen, liegen auf einer Geraden.*

a) Von dem festen Punkte lassen sich zwei Tangenten an den Ort $H^{(2)}$ ziehen.

Der feste Punkt sei E, die Tangenten durch ihn berühren $H^{(2)}$ in C und D. Durch E ziehe man eine Gerade, welche CD in F, $H^{(2)}$ in G und H schneidet, so sollen $EFGH$ harmonische Punkte sein.

Mit den Tangenten in G und H schneide man CE in K und N, DE in L und O.

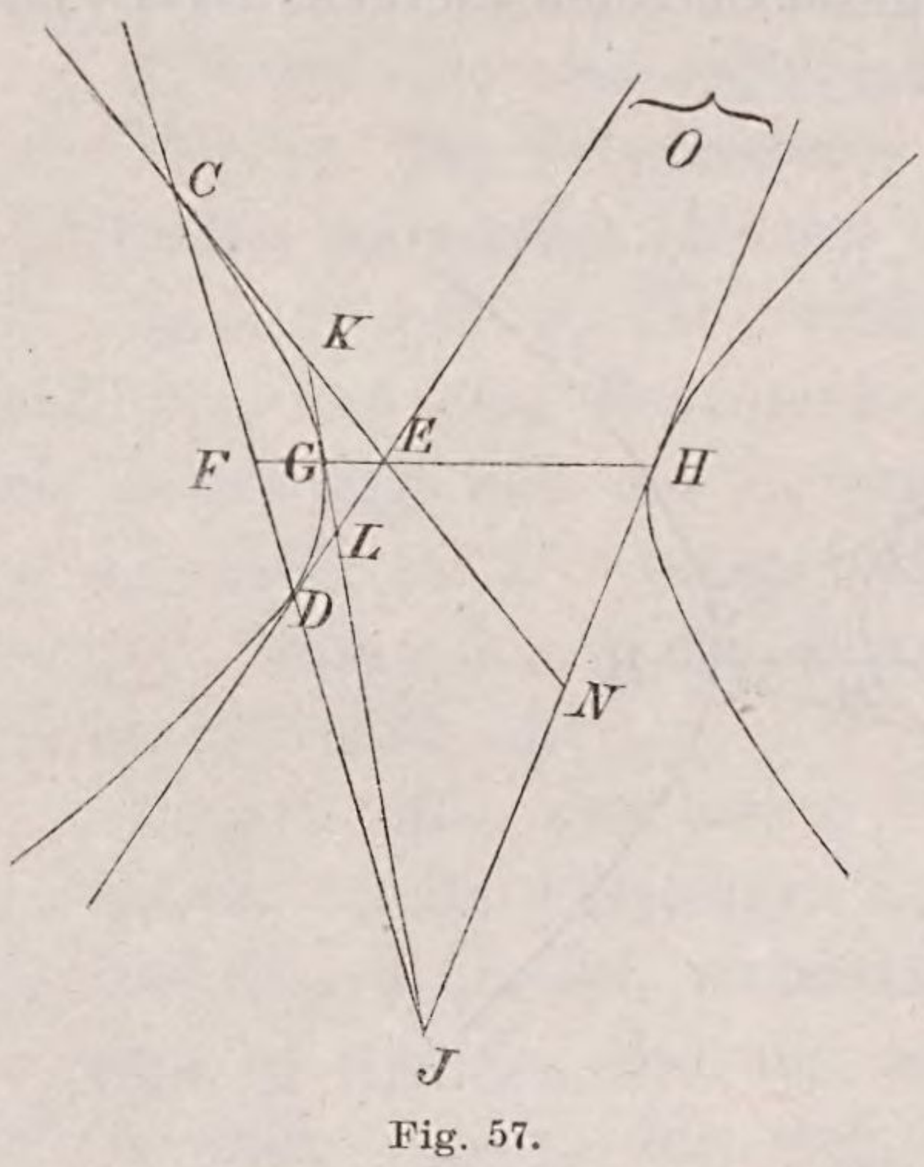

Fig. 57.

Nach 160 d) und e) sind dann C und E die Ähnlichkeitspunkte der Vektorenkreise von K und N, ebenso D und E diejenigen der Vektorenkreise von L und O, also sind die Punktgruppen

$CEKN$ und $DELO$

harmonisch; folglich müssen sich CD, KL, NO in einem Punkte schneiden und die Punkte

$EFGH$

sind harmonisch.

b) Von dem festen Punkte E lassen sich keine Tangenten an $H^{(2)}$ ziehen.

Man ziehe durch E eine feste Gerade, welche $H^{(2)}$ in A und B und eine veränderliche Gerade g, welche $H^{(2)}$ in C und D schneidet. Die Tangenten in $ABCD$ bilden ein vollständiges Vierseit mit den drei Diagonalen

FG, IH, KL.

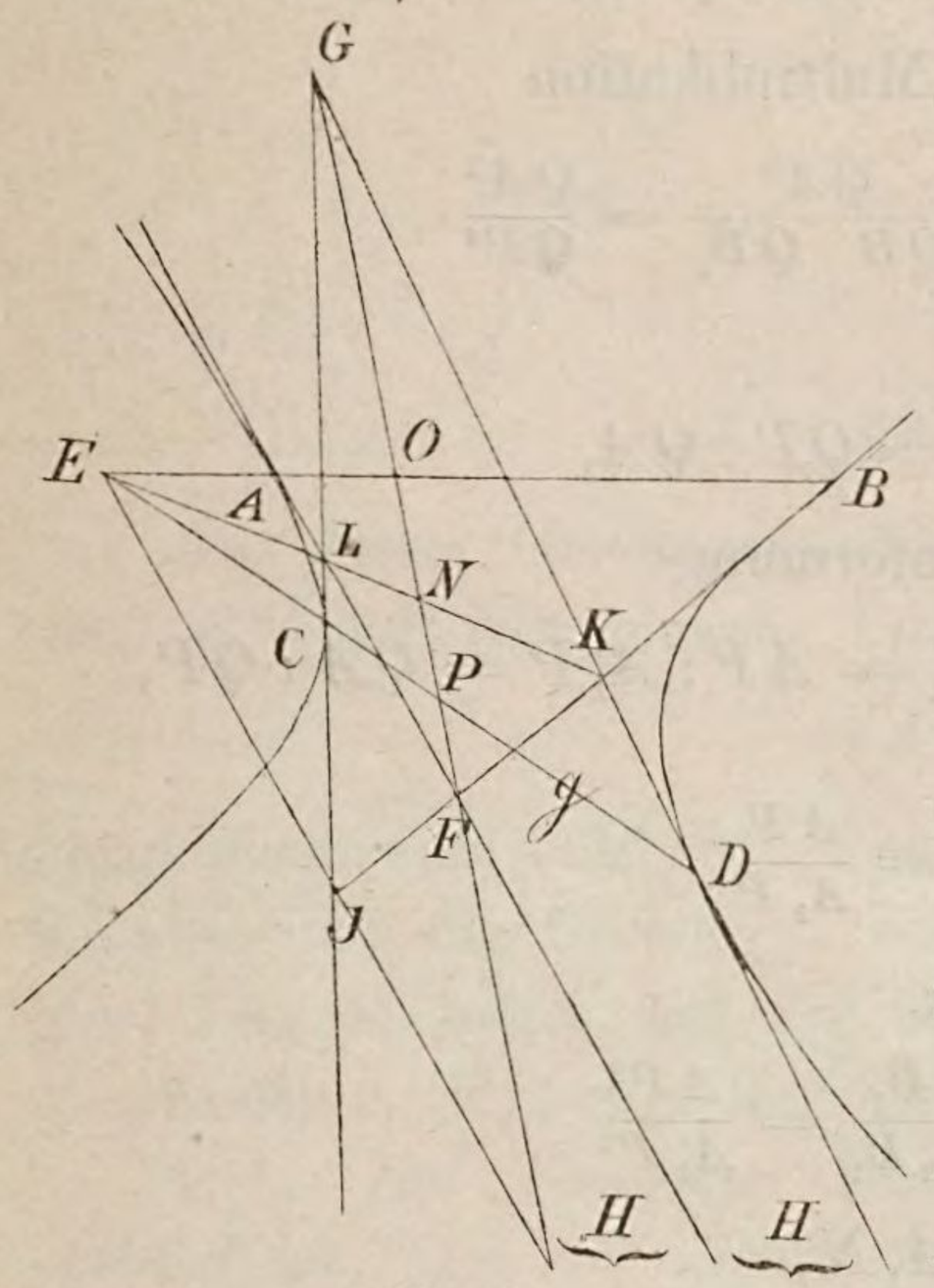

Fig. 58.

Ein Ähnlichkeitspunkt der Vektorenkreise der Punkte L und K sowohl wie I und H mufs auf AB wie auf CD liegen (160 e.), also schneiden sich

AB, CD, IH, KL

im Punkte E.

Daher werden L und K, A und B, C und D in N, O, P von E durch FG harmonisch getrennt.

Mit dem Punkte E und der Geraden EAB sind aber auch sofort die Punkte F und O gegeben; wie sich also auch g um E dreht, der Punkt P durchläuft die Gerade FO.

c) Wie in § 5 folgt jetzt, dafs $H^{(2)}$ eine gleichseitige Hyperbel ist.

---

§ 4. 37—45.

162. *Wenn zwei Punktpaare AA_1 und BB_1 durch P und N harmonisch getrennt werden, so ist*

$$\frac{AB \,.\, AB_1}{A_1B \,.\, A_1B_1} = \frac{AP^2}{A_1P^2} = \frac{AN^2}{A_1N^2}.$$

Man halbiere NP in Q, dann ist

$$QA \,.\, QA_1 = QB \,.\, QB_1 = QP^2,$$
$$QA : QB = QB_1 : QA_1 .$$

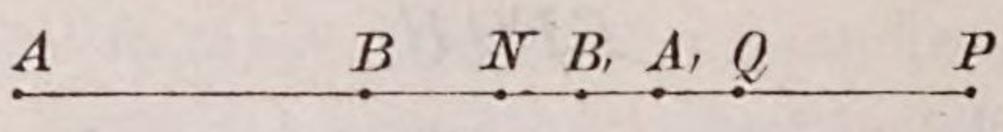

Fig. 59.

Hieraus folgt durch bekannte Umformung

$$QA - QB : QB_1 - QA_1 = AB : A_1B_1 = QA : QB_1$$
$$QA - QB_1 : QB - QA_1 = AB_1 : A_1B = QA : QB$$

und hieraus durch gliedweise Multiplikation

$$\frac{AB \,.\, AB_1}{A_1B \,.\, A_1B_1} = \frac{QA^2}{QB \,.\, QB_1} = \frac{QA^2}{QP^2}.$$

Aus der Proportion

$$QA : QP = QP : QA_1$$

findet man durch dieselbe Umformung

$$QA + QP : QP + QA_1 = AP : A_1P = QA : QP,$$

also:

$$\frac{QA}{QP} = \frac{AP}{A_1P}$$

und daher durch Substitution:

$$\frac{AB \,.\, AB_1}{A_1B \,.\, A_1B_1} = \frac{AP^2}{A_1P^2}$$

und weil $AP : A_1P = AN : A_1N$,

$$\frac{AB \,.\, AB_1}{A_1B \,.\, A_1B_1} = \frac{AN^2}{A_1N^2}.$$

163. *Alle Punkte, welche einen festen Punkt P von einer gleichseitigen Hyperbel harmonisch trennen, liegen auf einer Geraden p.*

P und p heifsen Pol und Polare.

Durch den Punkt P ziehe man den Durchmesser AA_1 und eine beliebige Sehne CC_1 und ziehe durch ihre Endpunkte parallel zu der konjugierten Richtung von AA_1 die Geraden CB und C_1B_1. Der Punkt D trenne P von C und C_1 harmonisch; zieht man $DN \parallel CB$, so sind auch BB_1PN harmonische Punkte.

Nun ist

$$CB^2 = AB \,.\, A_1B, \quad C_1B_1{}^2 = AB_1 \,.\, A_1B_1,$$

also:

$$\frac{AB \,.\, A_1B}{AB_1 \,.\, A_1B_1} = \frac{BP^2}{B_1P^2} = \frac{BN^2}{B_1N^2}.$$

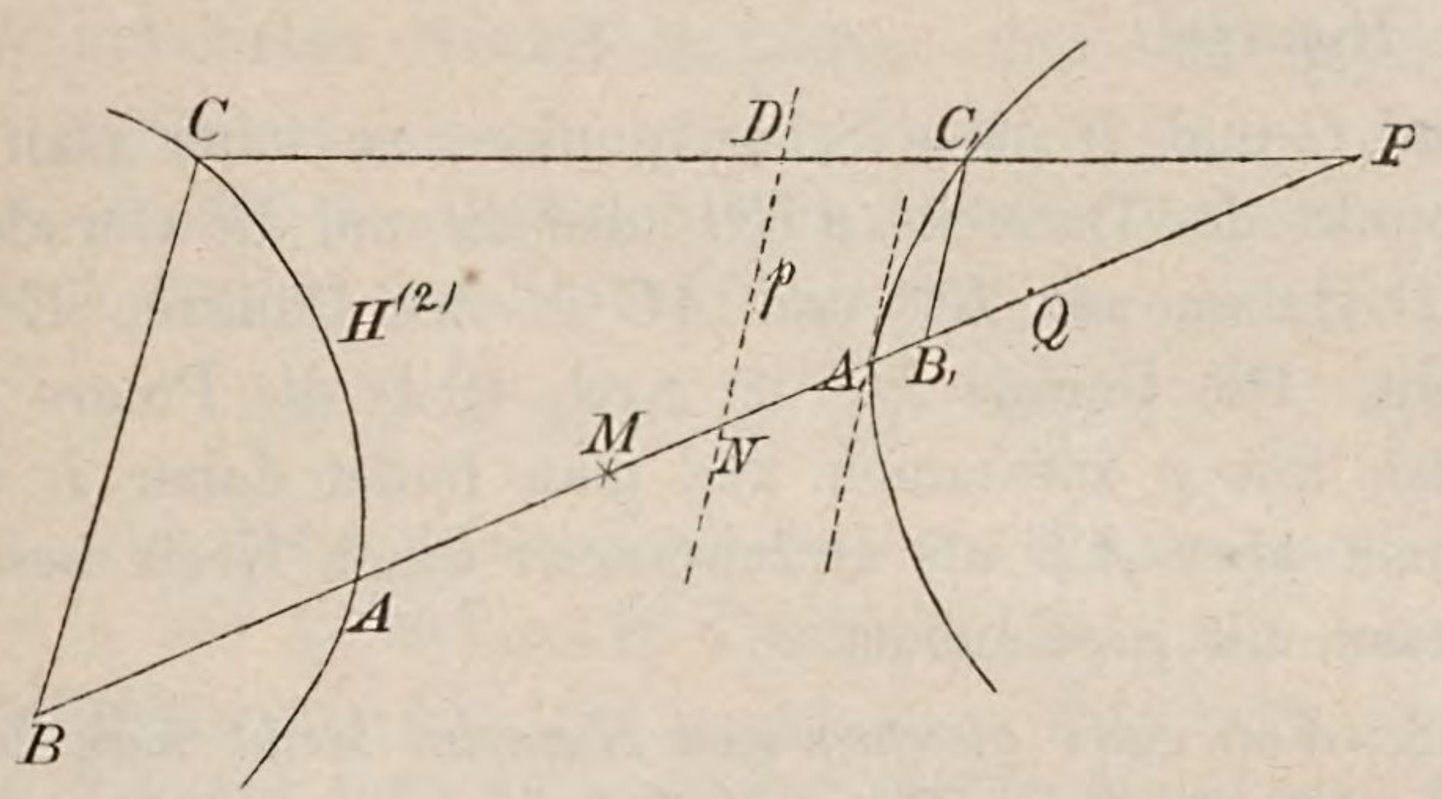

Fig. 60.

Aus dieser Gleichung folgt wegen des vorigen Satzes und weil BB_1NP harmonische Punkte sind, dafs auch

$$AA_1NP$$

harmonisch sind; also ist N ein fester Punkt von AA_1. Zieht man in ihm die Gerade p, welche der Richtung AA_1 konjugiert ist, so liegen auf ihr alle Punkte, welche P von der gleichseitigen Hyperbel harmonisch trennen.

164. *Der Pol einer Geraden, die zu einer Asymptote parallel ist, liegt auf dieser Asymptote. Seine Entfernung von der Geraden wird durch die gleichseitige Hyperbel halbiert.*

165. *Die Polare eines Punktes einer Asymptote ist dieser parallel.*

166. *In jedem einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecke bilden die Fufspunkte der Höhen ein Poldreieck.* (9 a. 40 d.)

Der Feuerbachsche Kreis geht durch diese Fufspunkte und halbiert die oberen Abschnitte der Höhen. Die Tangenten desselben in diesen Halbierungspunkten sind den Seiten des Dreiecks der Höhenfufspunkte parallel. Umschreibt man also einem Poldreieck ABC einen Kreis und zieht die der Seite BC parallelen Tangenten, deren Berührungspunkte D und E sein mögen, so treffen die Geraden AD und AE die gleich-

seitige Hyperbel in zwei Punktpaaren $D_1 D_2$ und $E_1 E_2$, deren Mitten D und E sind.

167. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man eine Sehne AB und die Polare p eines ihrer Punkte P; man lege durch P die Senkrechte zu AB und bestimme ihre Schnittpunkte mit der Hyperbel.*

Sind C und D diese Schnittpunkte, so kann man D als Höhenpunkt des Dreiecks ABC ansehen und die Geraden AD und BD stehen auf BC und AC in den Punkten E und F senkrecht. Die Gerade EF ist nach 40 d) die Polare von P, fällt also mit p zusammen und man findet daher E und F, wenn man über AB als Durchmesser einen Kreis beschreibt und diesen mit p schneidet.

168. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man den Mittelpunkt und ein Paar Pol und Polare; man soll konstruieren*

a) *die Tangenten durch den Pol,*

b) *die Schnittpunkte mit der Polare.*

Fig. 61.

M sei der Mittelpunkt, P und p Pol und Polare; Q und R die gesuchten Berührungspunkte. Die Gerade MP ist konjugiert zu QR und trifft also die Mitte S der Sehne; QM und QP sind auch konjugiert und daher ist $\sphericalangle SQP = QMP$, $SRP = RMP$. Also müssen die durch PQM und PRM gelegten Kreise die Sehne QR in Q und R berühren.

169. *Jede Sehne einer gleichseitigen Hyperbel erscheint ihrem Pol und dem Mittelpunkte unter Supplementwinkeln.* (Fig. 61.)

170. *Auf jedem Kreise, der durch den Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel gelegt ist, liegen unendlich viele Poldreiecke derselben.* (43 a.)

171. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man ein Poldreieck und den Mittelpunkt; man soll die Asymptoten und die*

Hyperbelpunkte konstruieren, welche auf den Verbindungslinien des Mittelpunktes mit den Ecken des Poldreiecks liegen.

Ist PQR das Poldreieck, M der Mittelpunkt, der auf dem Umkreise von PQR liegen mufs, so sind die Geraden MP und QR konjugiert (37); die Geraden, welche die von MP und QR gebildeten Winkel halbieren, sind den Asymptoten parallel. (23.)

Sind A und A_1 die Schnittpunkte von MP mit der Hyperbel und P_1 der Schnittpunkt mit QR, so ist

$$MA^2 = MA_1^2 = MP \,.\, MP_1 \,.$$

172. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man die beiden Leitlinien l und l_1 und einen Punkt P; man soll die Brennpunkte konstruieren.*

Um P kennt man einen Kreis, auf welchem der Brennpunkt B von l liegen mufs (36 c.); auf der Senkrechten durch P zu den Leitlinien findet man einen zweiten Hyperbelpunkt Q. Wenn PQ die Leitlinie l in C schneidet und $PQCD$ harmonisch sind, so liegt der Brennpunkt B auch auf dem Kreise über CD als Durchmesser. (45 c)

173. a) *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man einen Brennpunkt B und zwei Punkte P und Q.*

Ist $H^{(2)}$ die gesuchte gleichseitige Hyperbel und wird die Leitlinie b des Brennpunktes B von PQ in R geschnitten, so ist die Polare r von R diejenige Gerade in B, welche auf auf RB senkrecht steht, also den Winkel PBQ halbiert (45); deshalb halbiert BR den Nebenwinkel von PBQ und R ist mithin bekannt. Man kann also auf der Geraden, die in R auf PQ senkrecht steht, die Schnittpunkte $P_1 Q_1$ mit $H^{(2)}$ bestimmen. Die Höhenfufspunkte des Dreiecks PP_1Q liegen auf einem Kreise, der durch den Mittelpunkt M geht. (166. 43.) Da die Leitlinie b die Entfernung BM halbiert, so liegt M auf dem Kreise um R mit RB.

b) *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man den Brennpunkt B und zwei Tangenten t und t_1.*

Man fälle $BC \perp t$, $BC_1 \perp t_1$, so geht der Scheitelkreis (35.) durch C und C_1 und der Mittelpunkt M der gleichseitigen Hyperbel liegt auf der Mittelsenkrechten m von CC_1

Der Radius des Scheitelkreises oder die halbe Hauptachse verhält sich aber zu MB wie die Seite eines Quadrates zu ihrer Diagonale; also hat man über BC einen zweiten Ort für M.

174. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man einen Brennpunkt B, eine Tangente t und ihren Berührungspunkt P.*

Man kann, wie in der vorigen Aufgabe, den Schnittpunkt R von t mit der Leitlinie l konstruieren, denn $\sphericalangle RBP = 90^0$.

175. Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man zwei Punkte und ihre Tangenten.

176. Der Kreis über einer Doppelordinate der Hauptachse schneidet diese in konjugierten Punkten. (47.)

177. Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man einen Punkt, seine Tangente und die Lage der Hauptachse.

178. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man einen Brennpunkt B, die Lage der Hauptachse und einen Punkt P.*

Ist Q der Spiegelpunkt von P und schneidet PQ die Hauptachse in R und macht man auf ihr $RC = RD = \frac{1}{2} PQ$, so sind C und D konjugierte Punkte, also

$$MC \,.\, MD = a^2 = \tfrac{1}{2} MB^2.$$

Setzt man $MC = MB - BC$, $MD = MB + BD$, so findet man MB.

179. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man einen Brennpunkt B und ein Paar Pol und Polare A und a; man soll den Mittelpunkt konstruieren.*

Der Pol C von AB kann bestimmt werden, denn er liegt sowohl auf a, wie auf der in B auf AB errichteten Senkrechten. Der Punkt C liegt auf der Leitlinie l von B und der Mittelpunkt auf einem Kreise um C mit CB (36 b). Wenn sich a und AB in D schneiden, so ist ACD ein Poldreieck, und der um dasselbe beschriebene Kreis geht durch den Mittelpunkt. (43.)

180. *Die Polare eines Punktes P einer Leitlinie l schneidet diese in einem solchen Punkte Q, daſs die Strecke PQ dem Mittelpunkte unter einem rechten Winkel erscheint.*

Ist B der Brennpunkt von l, so ist $\sphericalangle PBQ = 90^0$ (45 c), also auch (36 b.) $\sphericalangle PMQ = 90^0$.

181. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man ein Paar Pol und Polare P und p und eine Achse der Lage nach.*

p schneide die Achse in Q, dann ist die Senkrechte q von P auf die Achse die Polare von Q. Wenn sich p und q in R schneiden, so ist PQR ein Poldreieck. (43.)

182. *Wenn man durch die Mitte F einer Sehne CD, durch einen Punkt A derselben und den Mittelpunkt M einer gleichseitigen Hyperbel einen Kreis legt, so ist seine Tangente t in F der Polare von A parallel.*

Denn da CD und FM (24 a.) konjugierte Richtungen sind, und

$$\measuredangle (t, FM) = CAM,$$

so sind auch t und AM konjugierte Richtungen.

183. *Wenn in der Ebene einer gleichseitigen Hyperbel zwei Punkte und die Richtungen ihrer Polaren gegeben sind, so geht derjenige Kreis durch diese Punkte, dessen Peripheriewinkel gleich dem von den Polaren gebildeten Winkel ist, durch den Mittelpunkt.* (182.)

184. *Von einer gleichseitigen Hyperbel kennt man zwei Punkte AA_1 und zwei Tangenten tt_1; man soll den Mittelpunkt M bestimmen.*

Die Tangenten mögen sich in T schneiden; man verbinde A mit A_1 und schneide mit der Verbindungslinie die Tangenten in B und B_1. Darauf konstruiere man dasjenige Punktpaar CD, welches AA_1 und BB_1 harmonisch teilt. Sind GG_1 die Berührungspunkte auf tt_1, so mufs GG_1 durch einen der Punkte C oder D, etwa durch C, gehen; also sind C und DT Pol und Polare. Man halbiere jetzt AA_1 in E, ziehe durch E die Parallele e zu DT und konstruiere durch C und E denjenigen Kreis, welcher e berührt, so mufs er nach 182. durch den Mittelpunkt gehen.

Durch C lege man die Senkrechte zu AA_1 und bestimme auf ihr die Schnittpunkte F und F_1 mit der gesuchten Hyperbel. (167.) [Der Kreis durch die Höhenfufspunkte des Dreiecks AA_1F mufs mit dem vorher beschriebenen zusammenfallen.]

Schneidet man AF mit GG_1 in H und mit tt_1 in II_1, so mufs die Polare von H die Gerade AF in einem Punkte H_1 treffen, so dafs $AFHH_1$ und II_1HH_1 harmonisch sind;

man kann also HH_1 finden und hat dadurch die Berührungspunkte G und G_1 auf den Tangenten t und t_1.

Die Punkte AGG_1 bestimmen ein Dreieck; legt man durch die Höhenfufspunkte einen Kreis, so schneidet er den vorher konstruierten Kreis im Mittelpunkte.

§ 7.

Hyperbel, Ellipse, Parabel.

185—221. Die Hyperbel.

185. In der Ebene seien aa_1 zwei feste Gerade, die sich in M schneiden mögen und den Winkel φ bilden. Läfst man den Nebenwinkel von φ unberücksichtigt, so erfüllen alle Punkte von der Lage, dafs die durch sie zu a und a_1 gezogenen Parallelen mit diesen Geraden ein Parallelogramm von konstantem Inhalte, q^2, begrenzen, eine krumme Linie, *Hyperbel* $H^{(2)}$. Dieselbe besteht aus zwei Zweigen, die in den beiden Scheitelwinkeln φ liegen.

q^2 heifst die Potenz der Hyperbel $H^{(2)}$.

Ist P ein Punkt derselben, so ist der zu ihm bezüglich M symmetrische Punkt P_1 auch ein Punkt der Hyperbel, also halbiert M jede durch ihn gehende Sehne und heifst der *Mittelpunkt*, jede durch ihn gehende Gerade ist ein *Durchmesser*.

Die Geraden a und a_1 heifsen die *Asymptoten*; diejenigen Durchmesser, welche die Asymptotenwinkel halbieren, sind die *Achsen*.

Von den Durchmessern schneiden nur diejenigen die Hyperbel, welche in den Winkel φ fallen. Diejenige Achse, welche die Hyperbel schneidet, heifst die *Hauptachse*, die andere die *Nebenachse*.

Ist P ein Punkt der Hyperbel und haben die durch ihn zu a_1 und a gezogenen Parallelen die Länge x und y, so ist der Inhalt des Parallelogramms $x \,.\, y \,.\, \sin\varphi$ und die Gleichung

$$x \,.\, y \,.\, \sin\varphi = q^2$$

heifst die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf die Asymptoten.

186. *Einen Punkt von der Lage zu konstruieren, dafs die durch ihn zu den Asymptoten gezogenen Parallelen ein Parallelogramm vom Inhalte q^2 begrenzen.*

187. *Jede Gerade wird von der Hyperbel und den Asymptoten in aequidistanten Punkten geschnitten.*

Beweis wie in 3.; man mufs nur, statt Senkrechte auf die Asymptoten zu fällen, zu ihnen die Parallelen ziehen.

188. a) *Die Hyperbel wird von einer Geraden höchstens in zwei Punkten geschnitten.*

Folgt aus 187. Fallen die beiden Schnittpunkte einer Geraden zusammen, so heifst sie eine *Tangente.*

b) *Auf jeder Tangente halbiert der Berührungspunkt die von den Asymptoten begrenzte Strecke.*

c) *Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel.* 7. a).

d) *Jede Tangente einer Hyperbel wird durch die beiden Asymptoten und zwei parallele Tangenten harmonisch geteilt.*

Wie in 16.

189. *In einem gegebenen Punkte einer Hyperbel die Tangente zu ziehen.* 5. a).

190. *Jede Tangente einer Hyperbel begrenzt mit den Asymptoten ein Dreieck von konstantem Inhalte.* 6. a).

191. *Alle Geraden, welche mit den Schenkeln des Winkels φ Dreiecke von konstantem Inhalte begrenzen, umhüllen eine Hyperbel; die Mitten der begrenzenden Strecken sind die Berührungspunkte.*

192. a) Zwei Durchmesser, deren Winkel von den Asymptoten harmonisch geteilt wird, heifsen *konjugierte Durchmesser.*

b) Von zwei konjugierten Durchmessern kann nur einer die Hyperbel schneiden.

c) Jede Gerade, die einem von zwei konjugierten Durchmessern parallel ist, heifst dem anderen konjugiert.

d) Die Achsen sind zwei konjugierte Durchmesser; die Hauptachse schneidet die Hyperbel in ihren *Scheiteln.* Der Kreis über der Hauptachse, welcher die Hyperbel in den Scheiteln berührt, heifst der *Scheitelkreis*; die Tangenten in den Scheiteln heifsen die *Scheiteltangenten.*

193. a) *Jeder von zwei konjugierten Durchmessern halbiert die dem anderen parallelen Sehnen.*

Beweis wie in 24. a).

b) *Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers sind dem konjugierten Durchmesser parallel.*

Folgt aus a.

c) *Irgend zwei parallele Tangenten einer Hyperbel berühren beide Zweige derselben.*

d) *Die Seknen, welche einen Hyperbelpunkt mit den Endpunkten eines Durchmessers verbinden, sind zwei konjugierten Durchmessern parallel.*

Ist AA_1 ein Durchmesser, B ein beliebiger Punkt der Hyperbel, so ziehe man durch den Mittelpunkt M die Parallele zu AB, welche A_1B in C_1 halbiert. Wegen 187. halbiert C_1 auch das von den Asymptoten auf A_1B begrenzte Stück. Zieht man noch durch M zu A_1B die Parallele, welche AB in C trifft, so werden die Durchmesser MC und MC_1 durch die Asymptoten harmonisch getrennt.

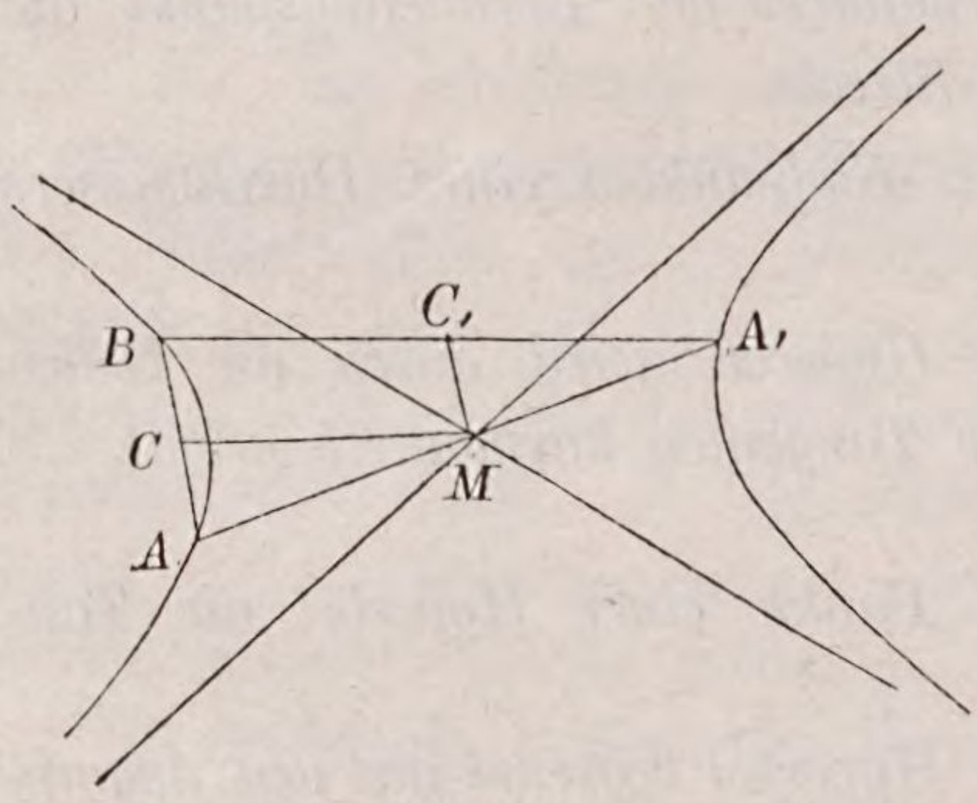

Fig. 62.

194. *Die konjugierte Hyperbel.*

a) *Alle Geraden, welche auf den Schenkeln der Nebenwinkel der Winkel φ Dreiecke von konstantem Inhalte $2q^2$ abschneiden, umhüllen eine Hyperbel $H_1^{(2)}$, welche die konjugierte Hyperbel der Hyperbel $H^{(2)}$ heifst.*

b) *Eine Hyperbel und ihre konjugierte Hyperbel haben dieselbe Potenz q^2.*

c) *Zwei konjugierte Durchmesser der einen Hyperbel sind auch konjugiert für die konjugierte Hyperbel.*

d) *Von zwei konjugierten Durchmessern schneidet der eine die Hyperbel der andere die konjugierte Hyperbel.*

e) Unter der *Gröfse eines Durchmessers*, der die Hyperbel nicht schneidet, versteht man die auf ihm von der konjugierten Hyperbel begrenzte Strecke.

f) Man bezeichnet die Hauptachse mit $2a$, die Nebenachse mit $2b$.

195. *Jede Parallele zu einer Asymptote schneidet die konjugierten Hyperbeln und die andere Asymptote in aequidistanten Punkten.*

Auf der Asymptote a seien C und C_1 gleichweit von M entfernt; wegen 194 a. müssen sich die Tangenten von ihnen an beide Hyperbeln in zwei Punkten D und D_1 der anderen Asymptote schneiden, die gleichweit von M entfernt sind.

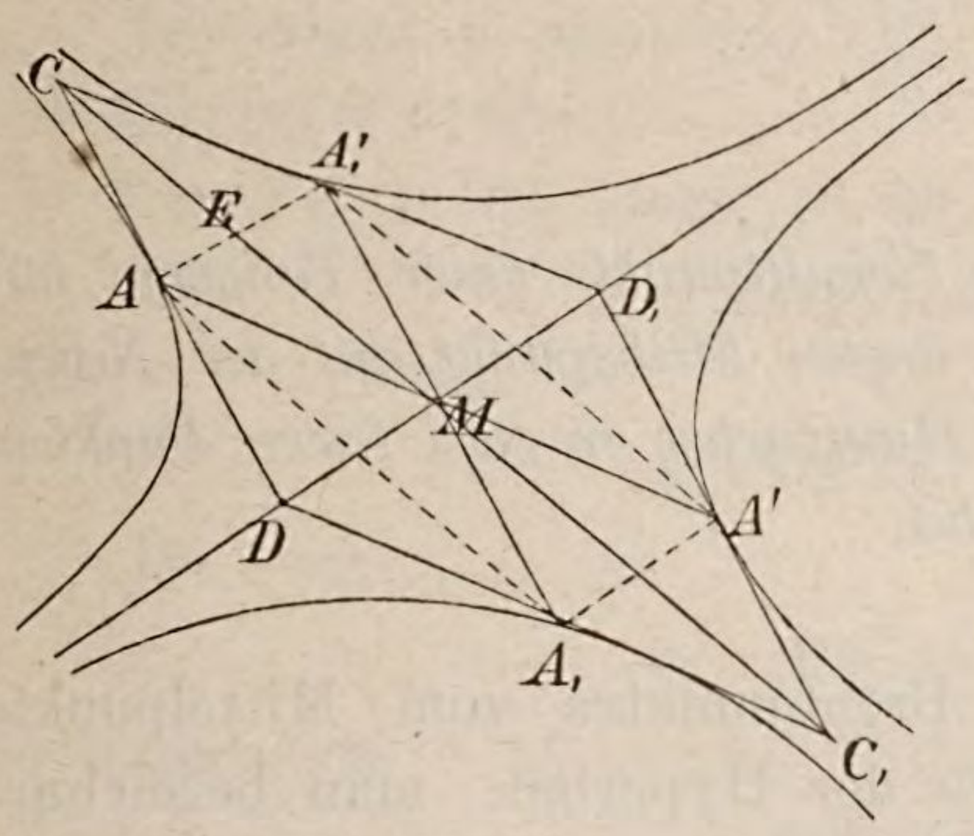

Fig. 63.

Sind $AA_1A'A_1'$ die Berührungspunkte der Seiten des Parallelogramms

$$CDC_1D_1,$$

so sind sie nach 188 b. die Mitten derselben und daher ist

$$AA_1 \parallel A'A_1' \parallel a, \quad AA_1' \parallel A_1A' \parallel a_1.$$

196. *In jedem einer Hyperbel umgeschriebenen Parallelogramme sind die Diagonalen konjugierte Durchmesser.*

188 d. 192 a.

197. *Das Parallelogramm aus zwei konjugierten Halbmessern ist konstant gleich der doppelten Potenz der Hyperbel.* (Fig. 63.)

AA' sei ein Durchmesser der Hyperbel; die Tangenten in den Endpunkten mögen die Asymptoten in C und D, C_1 und D_1 schneiden. Dann sind die Dreiecke MCD, MCD_1, MC_1D_1, MDC_1 flächengleich und folglich sind CD_1 und C_1D Tangenten der konjugierten Hyperbel.

Sind A_1' und A_1 die Mitten von CD_1 und C_1D, so ist A_1A_1' der zu AA' konjugierte Durchmesser und das Parallelogramm $AMA_1'C$ ist gleich dem Dreiecke CMD, also gleich $2q^2$.

198. *Die Differenz der Quadrate zweier konjugierter Halbmesser ist konstant gleich der vierfachen Potenz der Hyperbel multipliziert mit der Cotangente des Asymptotenwinkels.* (Fig. 63.)

AA_1' und MC mögen sich in E schneiden, dann ist

$$AM^2 = AE^2 + ME^2 + 2\,AE\,.\,ME\,.\cos\varphi$$
$$A_1'M^2 = A_1'E^2 + ME^2 - 2\,A_1'E\,.\,ME\,.\cos\varphi$$
$$AM^2 - A_1'M^2 = 2\,AE\,.\,2\,ME\,.\cos\varphi$$
$$= DM\,.\,CM\,.\cos\varphi$$
$$= 4\,q^2\,.\,\mathrm{ctg}\,\varphi\,.$$

199. *Die Brennpunkte.*

a) *Legt man durch die Schnittpunkte einer Tangente mit den Asymptoten einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf der Nebenachse liegt, so schneidet er die Hauptachse in zwei festen Punkten, den Brennpunkten der Hyperbel.*

Beweis wie in 29. a).

Die Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkte heifst die *lineare Excentrizität* der Hyperbel; man bezeichnet sie mit c.

b) *Das Quadrat der linearen Excentricität ist gleich der Summe der Quadrate der Halbachsen.*

Die Scheiteltangenten schneiden die Asymptoten in CC_1 und DD_1; diese vier Punkte liegen auf einem Kreise um M, der durch die Brennpunkte B und B_1 geht.

Da CD_1 und C_1D die Scheiteltangenten der konjugierten Hyperbel sind (194.), so ist CC_1 gleich der Nebenachse.

Bezeichnet man die Hauptachse mit $2a$, die Nebenachse mit $2b$, die Excentrizität mit c, so ist

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

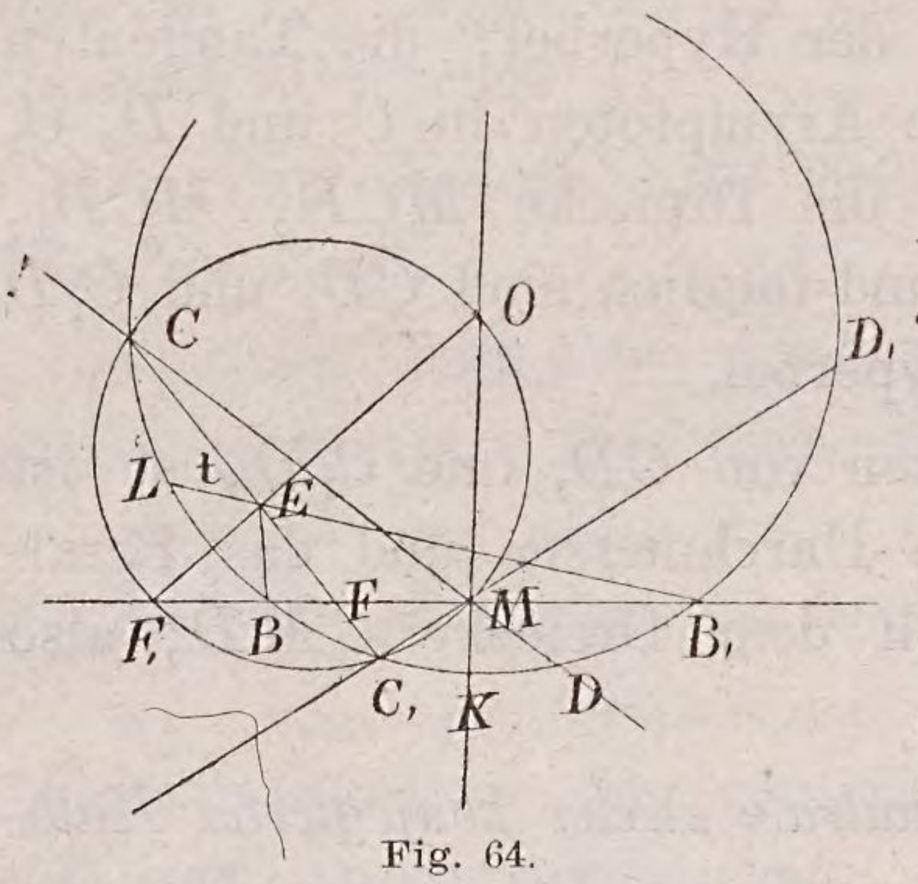

Fig. 64.

200. *Die Tangente in einem Punkte der Hyperbel bildet mit seinen Brennpunktsstrahlen gleiche Winkel.*

Eine Tangente t schneide die Asymptoten in C und C_1; durch diese Schnittpunkte lege man den Kreis $O^{(2)}$, dessen Mittelpunkt O auf der Nebenachse liegt, und der also durch die Brennpunkte geht. Er schneide die Asymptoten noch in D und D_1, dann ist

$$\text{Bog. } DK = C_1K,$$

also

$$\sphericalangle DCC_1 = MOC_1$$

und die vier Punkte $OMCC_1$ liegen auf einem Kreise.

Die Mitte E der Sehne CC_1 ist der Berührungspunkt mit der Hyperbel (188 b.).

Da $OE \perp CC_1$ steht, so ist

$$\sphericalangle EOC = EOC_1$$

und

$$\sphericalangle COC_1 = CMC_1.$$

Da auch

$$\sphericalangle CMF = C_1MF,$$

so mufs auch

$$\sphericalangle C_1MF = C_1OE$$

sein und die Schenkel MF und OE müssen sich in einem Punkte F_1 des Kreises um $OMCC_1$ treffen. Wegen Gleichheit der Peripheriewinkel CC_1M und CF_1M ist daher

$$\triangle C_1MF \sim CMF_1$$

$$MF \,.\, MF_1 = MC \,.\, MC_1 = MB^2.$$

Es sind also die Punkte und Strahlen

$$BB_1FF_1 \quad \text{und} \quad E(BB_1FF_1)$$

harmonisch und weil

$$\sphericalangle FEF_1 = 90^0,$$

so ist:

$$\sphericalangle FEB = FEB_1.$$

201. *Das Rechteck aus den Brennpunktsstrahlen eines Hyperbelpunktes ist gleich dem Quadrate seiner halben Tangente.*

Im harmonischen Büschel $E(BB_1FF_1)$ steht EF auf EF_1 senkrecht, also halbiert EF_1 den Winkel BEL und daher ist

$$EB = EL,$$

also auch

$$CE^2 = EB_1 \,.\, EL = EB_1 \,.\, EB.$$

202. *Die Differenz der Brennpunktsstrahlen eines Hyperbelpunktes ist gleich der Hauptachse.*

Man fälle EN senkrecht auf BB_1 und setze

$$MN = x, \quad EN = y,$$

so ist:

I. $$B_1E^2 = (c + x)^2 + y^2$$

II. $$BE^2 = (c - x)^2 + y^2.$$

Die Strecke CE bestimmt aber die Gröfse und Richtung des zu ME konjugierten Halbmessers (194 e.); also ist

$$ME^2 - CE^2 = 4q^2 \,.\, \operatorname{ctg} \varphi = a^2 - b^2$$

(cf. 198) und daher

$$CE^2 = ME^2 - a^2 + b^2.$$

Aber

$$ME^2 = x^2 + y^2,$$

also (cf. 201.)

III. $$2\,BE \,.\, B_1E = 2\,CE^2 = 2\,x^2 + 2\,y^2 - 2\,a^2 + 2\,b^2.$$

Durch Addition der Gleichungen I. und II. und Subtraktion von III. folgt sofort

$$(B_1E - BE)^2 = 2\,c^2 + 2\,a^2 - 2\,b^2 = 4\,a^2$$

$$B_1E - BE = 2\,a.$$

203. *Die Gegenpunkte eines Brennpunktes in Bezug auf die Tangenten einer Hyperbel liegen auf einem Kreise um den anderen Brennpunkt, welcher die Hauptachse zum Radius hat.*

Beweis wie in 33.

204. a) *Die Strahlen eines Brennpunktes nach den Berührungspunkten zweier Tangenten bilden einen Winkel, welcher durch den Brennpunktsstrahl nach dem Schnittpunkte der Tangenten halbiert wird.*

Beweis wie in 34.

b) *Der Schnittpunkt der Tangenten in den Endpunkten einer Brennpunktssehne liegt senkrecht über dem Brennpunkte.*

Folgt aus *a*.

205. *Die Fufspunkte der Senkrechten aus den Brennpunkten auf die Tangenten liegen auf dem Kreise über der Hauptachse; er heifst der Scheitelkreis.*

Beweis wie in 35.

206. a) *Die Schnittpunkte der Tangenten in den Endpunkten einer Brennpunktssehne liegen auf einer festen Geraden, der „Leitlinie“ des Brennpunktes.*

Beweis wie in 36 a.

b) *Das Verhältnis der Abstände eines Punktes der Hyperbel von einem Brennpunkte und seiner Leitlinie ist konstant.*

Beweis wie in 36 c.

207. *Harmonische Eigenschaften.*

a) *Vier Tangenten der Hyperbel, welche eine Asymptote harmonisch schneiden, schneiden jede Tangente harmonisch. Sie heifsen harmonische Tangenten.*

Die vier Tangenten $abcd$ (in der Figur ist nur a gezeichnet) mögen die Asymptote m harmonisch in $ABCD$ schneiden; sie treffen die zweite Asymptote m_1 in $A_1B_1C_1D_1$ und eine fünfte Tangente e in $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$.

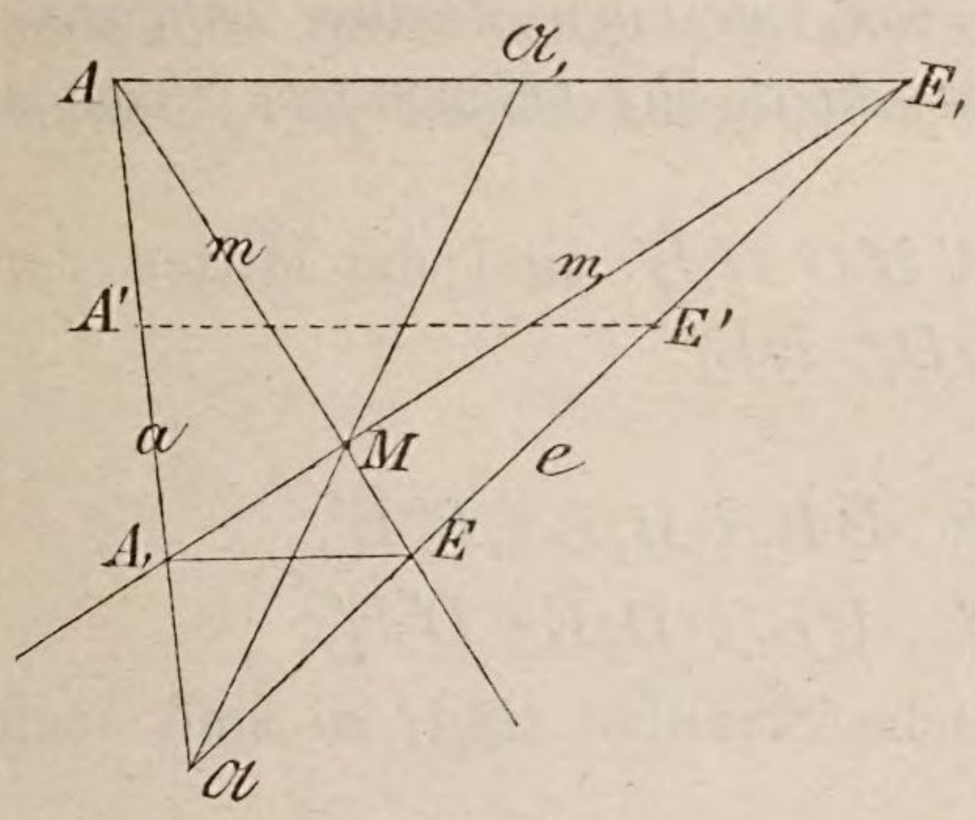

Fig. 65.

Verbindet man A_1 mit $ABCD$, so erhält man vier harmonische Strahlen

$$A_1(ABCD).$$

Wenn die Tangente e die Asymptoten m und m_1 in E und E_1 schneidet, so ist

$$AE_1 \parallel A_1E, \quad BE_1 \parallel B_1E, \quad CE_1 \parallel C_1E, \quad DE_1 \parallel D_1E$$

und daher halbieren die Geraden

$$\mathfrak{A}M, \quad \mathfrak{B}M, \quad \mathfrak{C}M, \quad \mathfrak{D}M$$

die Strecken

$$AE_1, \quad BE_1, \quad CE_1, \quad DE_1$$

in den Punkten

$$\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{C}_1, \quad \mathfrak{D}_1,$$

die auf einer Geraden liegen müssen, welche parallel zu m ist und die Entfernung zwischen E_1 und m, halbiert. Weil aber

$$E_1(ABCD)$$

vier harmonische Strahlen, so sind auch

$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1 \text{ und } \mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$$

harmonisch.

b) *Vier Tangenten einer Hyperbel, welche eine fünfte Tangente harmonisch schneiden, treffen jede Tangente in harmonischen Punkten.*

Die Tangenten $abcd$ schneiden eine fünfte Tangente e in den harmonischen Punkten $\mathfrak{ABCD}$. Dann sind $M(\mathfrak{ABCD})$ harmonische Strahlen; diese treffen die Strahlen $E_1(ABCD)$ bezüglich in den Mitten $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ der Strecken E_1A, E_1B, E_1C, E_1D. Da die Mitten auf einer Geraden liegen müssen, so sind es vier harmonische Punkte, also $E_1(ABCD)$ vier harmonische Strahlen. Mithin schneiden die Tangenten $abcd$ die Asymptote und wegen a) jede andere Tangente harmonisch.

c) *Die Berührungspunkte von vier harmonischen Tangenten werden aus jedem Hyperbelpunkte durch vier harmonische Strahlen projiziert.*

Die Berührungspunkte $A'B'C'D'E'$ sind die Mitten der Strecken AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1.

Weil nun

$$AE_1 \parallel A_1E \parallel A'E', \quad BE_1 \parallel B_1E \parallel B'E',$$
$$CE_1 \parallel C_1E \parallel C'E', \quad DE_1 \parallel D_1E \parallel D'E'$$

ist und $E_1(ABCD)$ harmonische Strahlen sind, so sind auch $E'(A'B'C'D')$ harmonisch.

d) *Wenn vier Punkte einer Hyperbel aus einem fünften Punkte derselben durch harmonische Strahlen projiziert werden, so werden sie aus jedem Hyperbelpunkte durch harmonische Strahlen projiziert.*

Es seien $A'B'C'D'$ vier harmonische Punkte der Hyperbel, E' ein fünfter Punkt, und $E'(A'B'C'D')$ vier harmonische Strahlen.

Die Tangenten in den fünf Punkten $A'B'C'D'E'$ treffen die Asymptoten in $ABCDE$ und $A_1B_1C_1D_1E_1$, und wieder ist

$$AE_1 \parallel A_1E \parallel A'E', \quad BE_1 \parallel B_1E \parallel B'E',$$
$$CE_1 \parallel C_1E \parallel C'E', \quad DE_1 \parallel D_1E \parallel D'E'$$

also sind $E_1(ABCD)$ und $ABCD$ harmonisch und die Tangenten sind harmonische Tangenten.

Aus c) ergiebt sich dann, dafs ihre Berührungspunkte $A'B'C'D'$ aus jedem Hyperbelpunkte durch harmonische Strahlen projiziert werden.

e) Vier Punkte einer Hyperbel, die aus jedem fünften Punkte derselben durch harmonische Strahlen projiziert werden, heifsen *harmonische Punkte der Hyperbel* und vier Tangenten,

welche jede fünfte in harmonischen Punkten schneiden, heifsen *harmonische Tangenten.*

208. a) *Alle Punkte, welche von einem festen Punkte durch die Hyperbel harmonisch getrennt sind, liegen auf einer Geraden, welche dem Durchmesser des Punktes konjugiert ist.*

Der Punkt und die Gerade heifsen *Pol* und *Polare.*

I. Fall. Der feste Punkt liegt aufserhalb der Hyperbel. B sei ein fester Punkt aufserhalb der Hyperbel, so dafs sich von ihm zwei Tangenten BC und BC_1 an dieselbe ziehen lassen. Die Berührungspunkte CC_1 seien durch DD_1 har-

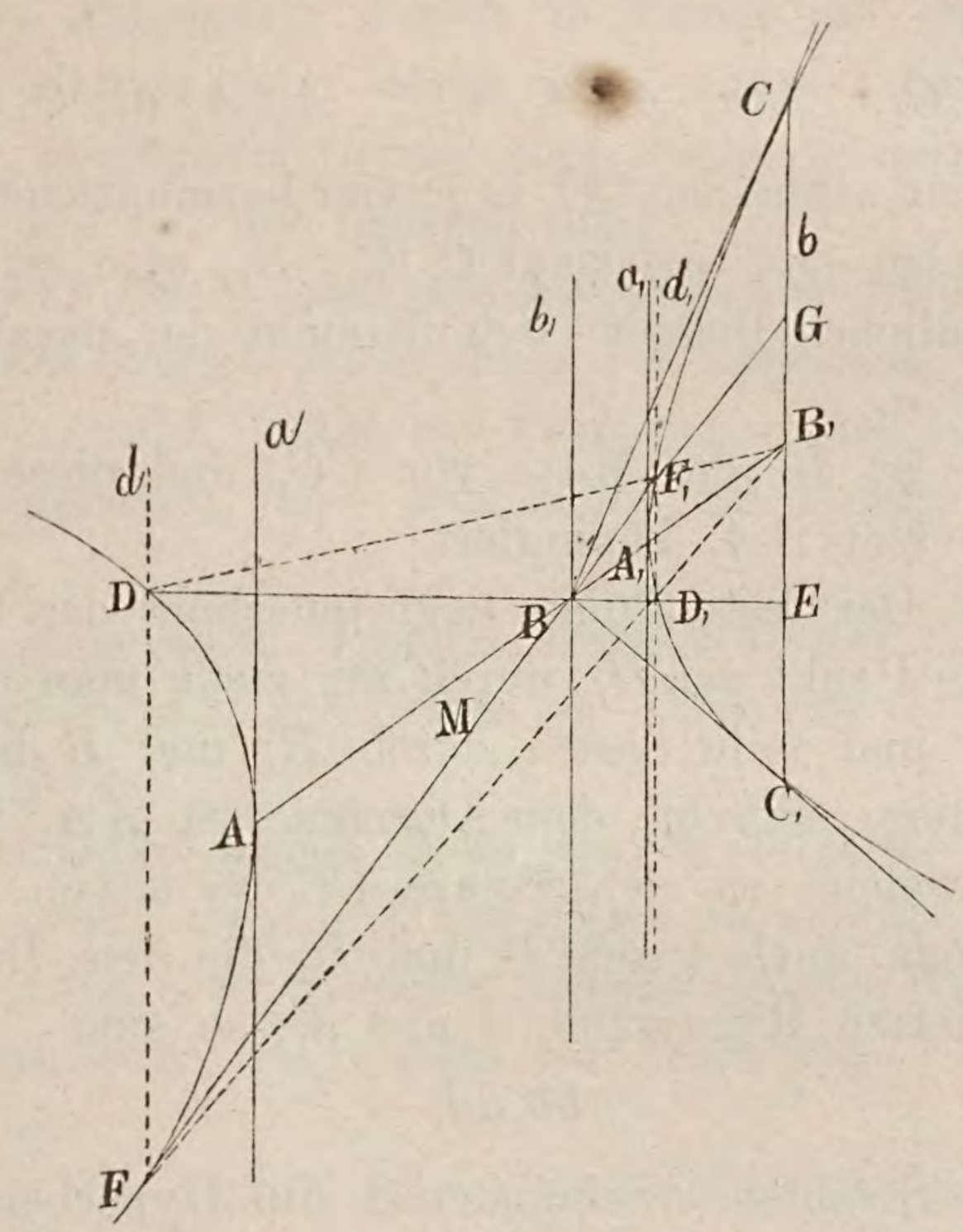

Fig. 66.

monisch getrennt; es sind also CC_1DD_1 vier harmonische Punkte der Hyperbel, die aus jedem Punkte derselben durch vier harmonische Strahlen projiziert werden.

In C und C_1 ziehe man die Tangenten c und c_1, so sind die Strahlenbüschel

$$C(c,\ C_1,\ D,\ D_1) \text{ und } C_1(c_1,\ C,\ D,\ D_1)$$

harmonisch. Beide schneiden die Gerade DD_1 in zwei harmonischen Punktgruppen, in denen drei Punktpaare mit den Punkten D, D_1, E zusammenfallen; also mufs auch das vierte

Punktpaar im Schnittpunkte B der Tangenten c und c_1 sich vereinigen.

Wenn nun das Punktpaar DD_1 die Hyperbel durchläuft, so dafs also CC_1 durch DD_1 harmonisch getrennt sind, so mufs DD_1 um B sich drehen. Es bleiben dabei B und E durch D und D_1 harmonisch getrennt.

Um noch zu zeigen, dafs die Polare eines Punktes seinem Durchmesser konjugiert ist, zieht man durch den Pol B den Durchmesser AA_1, welcher die Polare CC_1 in B_1 schneidet, und in A und A_1 die Tangenten a und a_1, so sind die Punkte und Strahlen

$$AA_1CC_1, \quad A(a, A_1, C, C_1), \quad A_1(A, a_1, C, C_1)$$

harmonisch und schneiden CC_1 in je vier harmonischen Punkten. Drei von diesen sind jedesmal C, C_1, B_1, also ist der vierte der im Unendlichen liegende Schnittpunkt der parallelen Tangenten a und a_1.

Folglich ist B_1 die Mitte von CC_1 und diese Sehne ist dem Durchmesser AA_1 konjugiert.

II. Fall. Der feste Punkt liegt innerhalb der Hyperbel.

Der feste Punkt sei B_1, durch ihn ziehe man den Durchmesser AA_1 und teile diesen durch B_1 und B harmonisch; in B konstruiere man die dem Durchmesser AA_1 konjugierte Gerade b_1, welche zu der Polare $CC_1 = b$ von B parallel ist. Zieht man auch durch D und D_1 die dem Durchmesser AA_1 konjugierten Richtungen d und d_1, so sind

$$bb_1dd_1$$

harmonische Strahlen. Schneidet d die Hyperbel in F, so wird die Gerade BF sowohl von bb_1dd_1 wie (I. Fall) von bb_1 und der Hyperbel harmonisch geteilt. Es fallen aber die Teilpunkte B und G auf b_1 und b und der Teilpunkt F zusammen, also mufs auch d_1 durch den Schnittpunkt F_1 von BF mit der Hyperbel gehen.

Weil nun DFD_1F_1 ein Trapez ist, dessen parallele Seiten DF und D_1F_1 dem Durchmesser AA_1 konjugiert sind, so müssen sich die anderen Seiten DF_1 und D_1F auf AA_1 in demjenigen Punkte schneiden, welcher B von DF und D_1F_1 harmonisch trennt, also in B_1. Somit wird jede durch B_1

gezogene Sehne DF_1 von B_1 und b_1 harmonisch getrennt; b_1 ist die Polare von B_1.

209. a) *Die Polare eines aufserhalb der Hyperbel gelegenen Punktes ist seine Berührungssehne.*

b) *Die Polare eines Hyperbelpunktes ist seine Tangente.*

c) *Die Polare des Mittelpunktes ist die unendlich ferne Gerade.*

Beweis wie in 38.

210. *Durchläuft ein Punkt eine Gerade, so dreht sich seine Polare um den Pol der Geraden und umgekehrt.*

Beweis wie in 39.

211. a) *Konjugierte Punkte* in Bezug auf eine Hyperbel sind solche Punkte, von denen jeder auf der Polare des anderen liegt; *konjugierte Gerade* sind solche Gerade, von denen jede durch den Pol der anderen geht.

b) *Einem Punkte sind alle Punkte seiner Polare, einer Geraden sind alle Gerade durch ihren Pol konjugiert.*

c) Ein Dreieck heifst ein *Poldreieck*, wenn jede Ecke der Pol der Gegenseite, also jede Seite die Polare der Gegenecke ist.

d) *In jedem einer Hyperbel eingeschriebenen Vierecke bilden die Schnittpunkte der Gegenseiten ein Poldreieck.*

Siehe 40.

212. a) *Jede Gerade durch den Schnittpunkt zweier Tangenten wird durch ihren Pol von diesen harmonisch getrennt.*

b) *In jedem einer Hyperbel umgeschriebenen Vierecke bilden die Schnittpunkte der Gegenseiten ein Poldreieck.*

Siehe 41.

213. a) *Die Polare eines Brennpunktes ist seine Leitlinie.*

206 b. 208 a.

b) *Der Pol einer Brennpunktssehne liegt auf seiner Leitlinie senkrecht über dem Brennpunkte.*

204 b. 213 a.

c) *Je zwei konjugierte Strahlen eines Brennpunktes stehen auf einander senkrecht.*

213 a. und b.

214. a) *Auf jeder Geraden giebt es einen festen Punkt, dessen Entfernungen von je zwei konjugierten Punkten dieser Geraden ein Rechteck von konstantem Inhalte bilden.*

I. Man hat die beiden Fälle zu unterscheiden, ob die Gerade die Hyperbel schneidet oder nicht. Sind im ersten Falle A und B die Schnittpunkte von g, X und Y irgend zwei konjugierte Punkte, C die Mitte von AB, so ist AB durch XY harmonisch geteilt, also

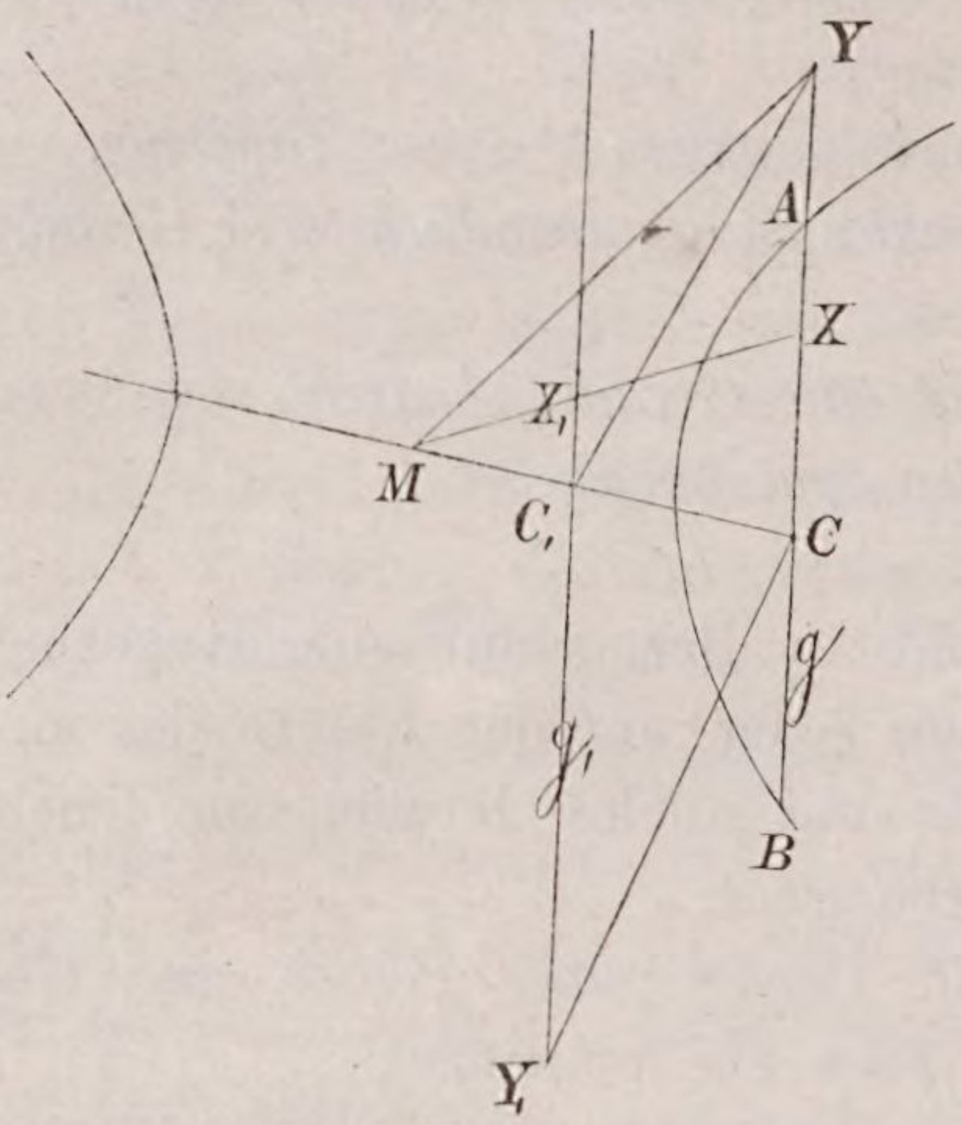

Fig. 67.

$$AC^2 = CX \,.\, CY.$$

II. Im zweiten Falle sei g_1 die Gerade, MC_1 der ihr konjugierte Durchmesser, $X_1 Y_1$ ein Paar konjugierter Punkte auf g_1. Die Polare g von C_1 ist parallel zu g_1 und schneidet die Hyperbel in A und B und den Durchmesser MC_1 im Pole C von g_1.

Die Gerade MX_1 schneide g in X; dann ist CY_1 die Polare von X_1; diejenige von X ist zu CY_1 parallel, da beide zu MX konjugiert sind und trifft g im konjugierten Punkte Y von X. — Da nun

$$\frac{C_1 X_1}{CX} = \frac{MC_1}{MC}$$

$$\frac{C_1 Y_1}{CY} = 1,$$

so folgt durch Multiplikation

$$C_1 X_1 \cdot C_1 Y_1 = CX \cdot CY \cdot \frac{MC_1}{MC},$$

also konstant für jedes Paar konjugierter Punkte von g_1.

b) *Auf jedem Durchmesser einer Hyperbel ist das Rechteck aus den Entfernungen des Mittelpunktes von zwei konjugierten Punkten gleich dem Quadrate des Halbmessers.*

I. Wenn der Durchmesser die Hyperbel in A und A_1 schneidet und XY ein Paar konjugierter Punkte ist, so wird AA_1 durch XY harmonisch getrennt, also ist

$$MA^2 = MX \,.\, MY.$$

II. Der Durchmesser schneide die Hyperbel nicht, dann wird seine Gröfse durch die Schnittpunkte BB_1 mit der konjugierten Hyperbel bestimmt.

Auf diesem Durchmesser sei X ein beliebiger Punkt; man ziehe durch X die Parallele zur Asymptote a, welche die Hyperbel $H^{(2)}$ in C und die konjugierte Hyperbel $H_1^{(2)}$ in C_1 schneiden mag. Die Tangenten in C an $H^{(2)}$ und in C_1 an $H_1^{(2)}$ treffen die Asymptote a_1 in zwei Punkten D und D_1, den Polen von CC_1 in Bezug auf $H^{(2)}$ und $H_1^{(2)}$. Zieht man durch sie die Parallelen zu dem konjugierten Durchmesser von BB_1, so treffen sie diesen in zwei solchen Punkten Y und Y_1, dafs X und Y konjugierte Punkte für $H^{(2)}$, X und Y_1 für $H_1^{(2)}$ sind. Nach 195. ist aber $MY = MY_1$; weil ferner BB_1 durch X und Y_1 harmonisch getrennt ist, so ist

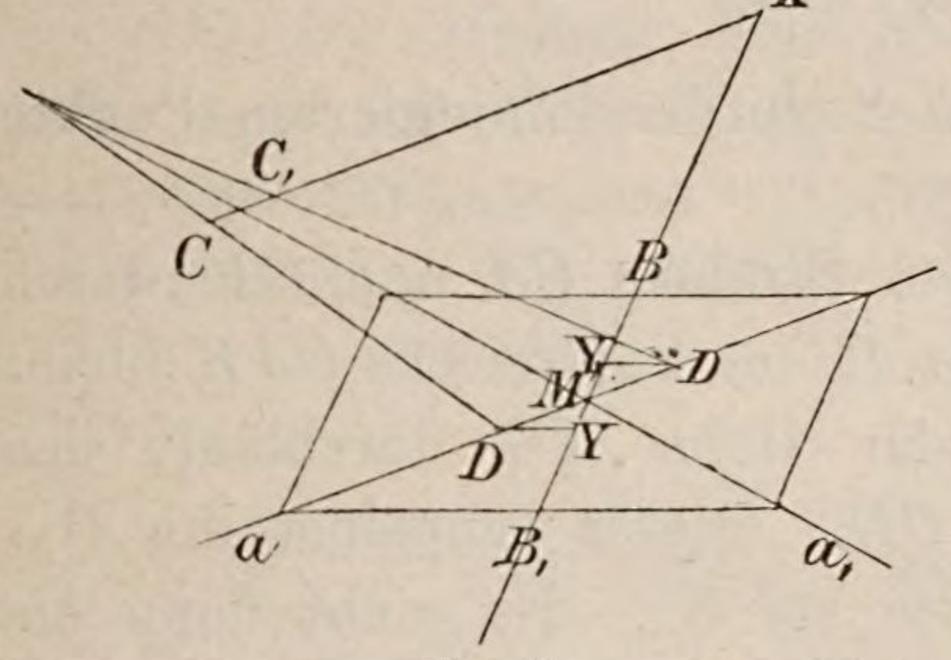

Fig. 68.

$$MB^2 = MX \,.\, MY_1,$$

also auch

$$MB^2 = MX \,.\, MY.$$

215. *Alle Poldreiecke einer Hyperbel, welche einen Punkt C einer Achse als gemeinsame Ecke besitzen, haben denselben Höhenpunkt H und das Produkt der Abstände der Punkte C und H vom Mittelpunkte M ist für jede Lage von C dasselbe.*

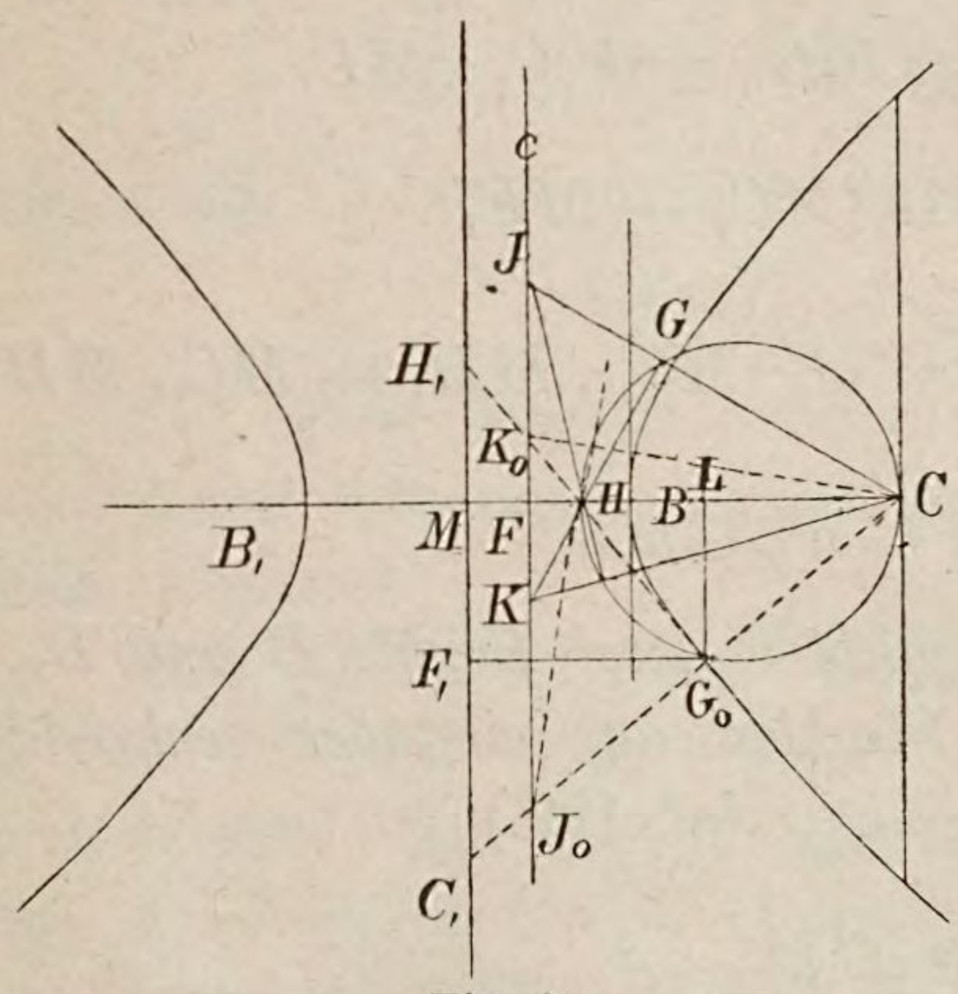

Fig. 69.

Auf der Hauptachse sei C ein Punkt, c seine Polare, welche in F auf der Hauptachse senkrecht steht. Es seien ferner J und K zwei konjugierte Punkte von c, also ist CJK ein Poldreieck; seine Höhen CF und KG schneiden sich in H. Man hat dann:

$$\triangle CJF \sim KFH$$

also:

$$CF \,.\, FH = FJ \,.\, FK$$

und weil

$$FJ \,.\, FK = m^2$$

konstant ist, so ist auch

$$CF \,.\, FH = m^2$$

und folglich bleibt H für jede Lage der konjugierten Punkte J und K ungeändert.

Wie auch die konjugierten Strahlen CJ und CK durch C sich ändern, der Höhenpunkt H des Poldreiecks CJK bleibt fest und der Fufspunkt G der Höhe KG durchläuft den Kreis mit dem Durchmesser CH. Dieser schneidet die Hyperbel; einer der Schnittpunkte sei G_0. Es giebt dann ein Poldreieck CJ_0K_0, in welchem G_0 der Fufspunkt der Höhe K_0G_0 ist. Da aber CJ_0 die Polare von K_0 ist, so ist K_0G_0 eine Tangente an die Hyperbel. — Die Geraden G_0J_0 und G_0K_0 mögen die Nebenachse in C_1 und H_1 treffen. Dann ist

$$\triangle MCC_1 \sim MHH_1$$

und

$$MC \,.\, MH = MC_1 \,.\, MH_1.$$

Fällt man $G_0F_1 \perp MH_1$, so ist

$$\triangle MHH_1 \sim G_0F_1C_1$$

und

$$MH : MH_1 = F_1C_1 : F_1G_0 = F_1C_1 : ML$$

also:

$$MH \,.\, ML = MH_1(MC_1 - MF_1).$$

Aber

$$MH \,.\, ML = a^2, \quad MH_1 \,.\, MF_1 = b^2, \quad MC_1 \,.\, MH_1 = MC \,.\, MH$$

also

$$MC \,.\, MH = a^2 + b^2.$$

216. *Auf der Hauptachse giebt es zwei Punkte B und B_1, in denen je zwei konjugierte Strahlen auf einander senkrecht stehen. Diese sind die Brennpunkte.* (cf. 199.)

Macht man

$$MB^2 = a^2 + b^2 = c^2$$

und schneidet $MB = MB_1 = c$ auf der Hauptachse ab, so fallen die beiden Punkte C und H (cf. Fig. 69) in den Punkt

B zusammen. Da also in dem Poldreiecke CJK die Ecke C mit dem Höhenpunkte zusammenfällt, so mufs das Dreieck bei C rechtwinklig sein und die konjugierten Strahlen CJ und CK sind zu einander senkrecht.

217. *Die Polare eines Brennpunktes heifst die Leitlinie desselben.* (cf. 206 a.)

218. *Die Abstände eines Kurvenpunktes von einem Brennpunkte und seiner Leitlinie haben ein konstantes Verhältnis. Numerische Excentricität.* (cf. 206 b.)

Die Polare von B sei l; von zwei beliebigen Punkten C und C_1 der Kurve fälle man

$$CE \perp l, \quad C_1E_1 \perp l,$$

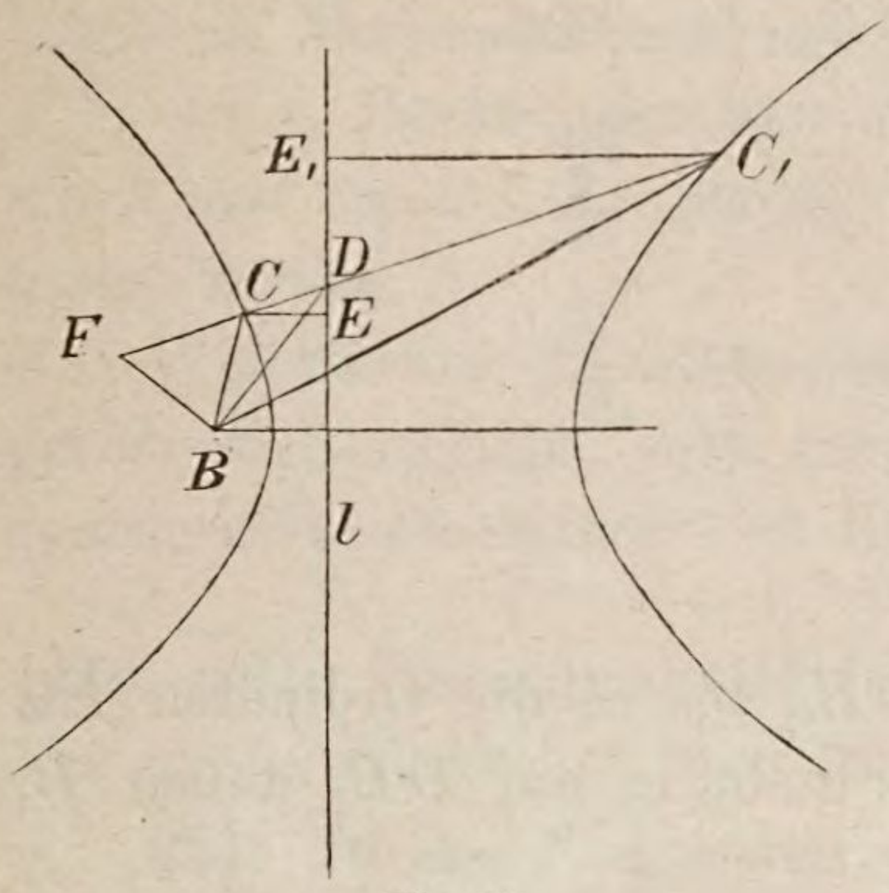

Fig. 70.

so soll sein

$$CB : CE = C_1B : C_1E_1.$$

Die Gerade CC_1 schneidet l in D und die Polare von D welche nach 216. in B auf DB senkrecht steht, treffe CC_1 in F.

Da $DFCC_1$ harmonisch und $DBF = 90^0$ ist, so sind BF und BD die Halbierungslinien des Winkels CBC_1 und seines Nebenwinkels, also ist

$$CB : C_1B = CD : C_1D = CE : C_1E_1$$

und nach Vertauschung der Mittelglieder:

$$CB : CE = C_1B : C_1E_1.$$

219. *Teilt man die Ordinaten einer gleichseitigen Hyperbel nach einem bestimmten Verhältnisse, so liegen die Teilpunkte auf einer Hyperbel.*

Von einem beliebigen Punkte B der gleichseitigen Hyperbel $H^{(2)}$ fälle man die Ordinate $B\mathfrak{B}$ auf die Hauptachse und schneide mit ihr die gleichseitige Hyperbel noch in B' und die Asymptoten in C und C'. Teilt man $B\mathfrak{B}$ und $B'\mathfrak{B}$ in B_1 und B_1', $C\mathfrak{B}$ und $C'\mathfrak{B}$ in C_1 und C_1' im Verhältnisse μ, so durchlaufen B_1 und B_1' eine Hyperbel $H_1^{(2)}$, deren Asymptoten MC_1 und MC_1' sind.

Um dies zu beweisen, ziehe man in B an $H^{(2)}$ die Tangente, welche die Asymptoten und die Hauptachse in E, F

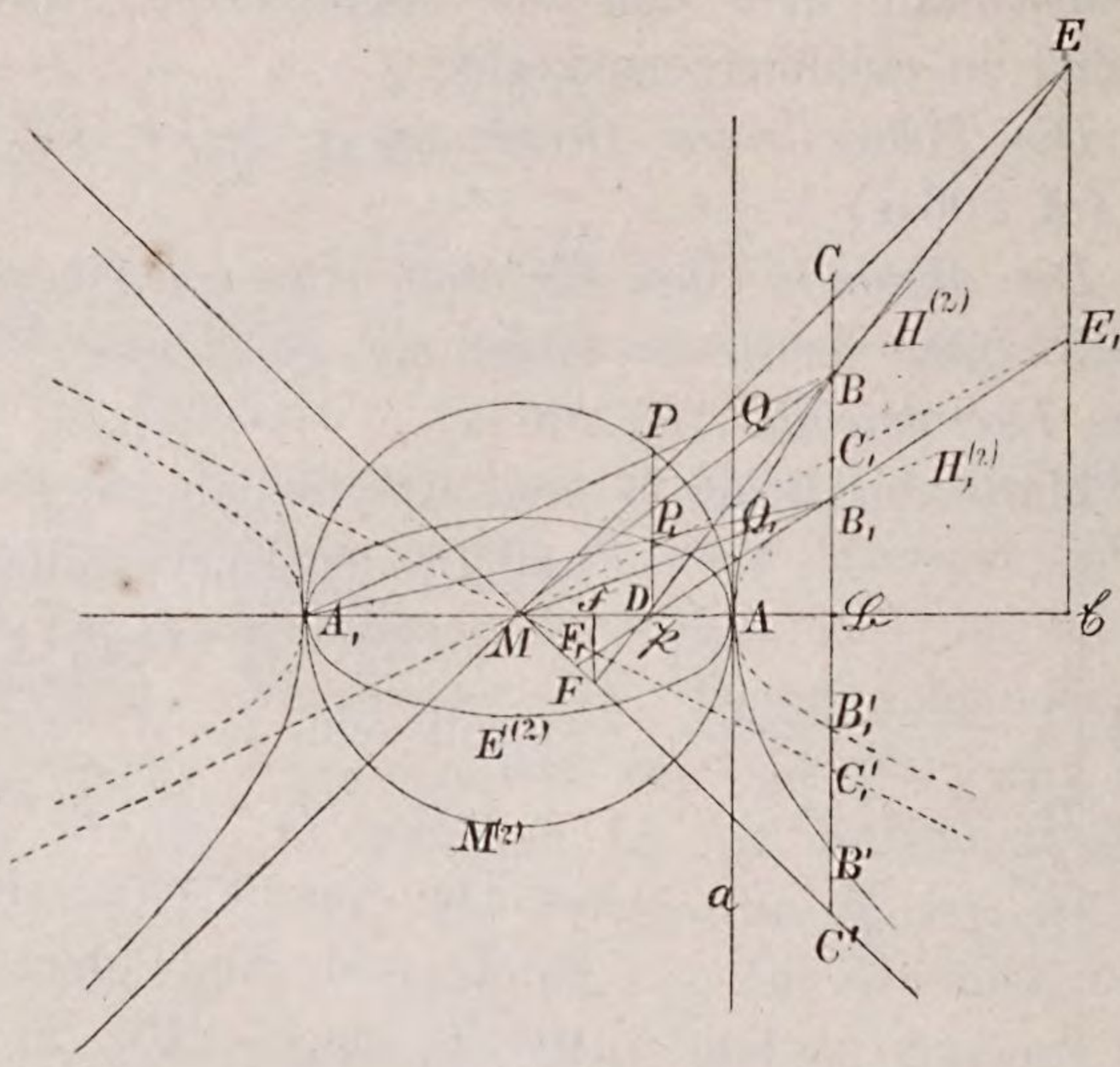

Fig. 71.

und D trifft. Zieht man nun DB_1, bis es die Ordinaten $E\mathfrak{E}$ und $F\mathfrak{F}$ in E_1 und F_1 trifft, so giebt es auf DB_1 aufser B_1 keinen Punkt der Kurve $H_1^{(2)}$.

Nun ist

$$\frac{B\mathfrak{B}}{B_1\mathfrak{B}} = \frac{E\mathfrak{E}}{E_1\mathfrak{E}} = \frac{F\mathfrak{F}}{F_1\mathfrak{F}} = \mu$$

also liegen E_1 und F_1 auf der Geraden MC_1 und MC_1'.

Weiter ist:

$$\frac{\triangle\ MDE}{\triangle\ MDE_1} = \frac{MDF}{MDF_1} = \mu$$

also auch:

$$\frac{\triangle\ MEF}{\triangle\ ME_1F_1} = \mu.$$

Mithin begrenzt die Tangente E_1F_1 von $H_1^{(2)}$ mit den Geraden MC_1 und MC_1' ein Dreieck von konstantem Inhalte und folglich ist $H_1^{(2)}$ eine Hyperbel. (§ 7, 190.)

220. Der Scheitelkreis $M^{(2)}$ mit dem Durchmesser AA_1 steht zur gleichseitigen Hyperbel (153.) in der Beziehung, dafs die Punkte beider durch A_1 und die Tangente a in A paarweise harmonisch getrennt werden.

Wenn man also $M^{(2)}$ und a mit A_1B in P und Q schneidet, so sind A_1QBP harmonisch. Zieht man die Ordinate $P\mathfrak{P}$, schneidet sie und a mit A_1B_1 in P_1 und Q_1, so sind $A_1Q_1B_1P_1$ auch harmonisch und es ist

$$\frac{P\mathfrak{P}}{P_1\mathfrak{P}} = \frac{B\mathfrak{B}}{B_1\mathfrak{B}} = \mu.$$

Wenn B die gleichseitige Hyperbel durchläuft, so durchläuft P_1 eine krumme Linie $E^{(2)}$, welche *Ellipse* heifst. Von ihr gilt, wie eben gezeigt:

Teilt man die Ordinate einer gleichseitigen Hyperbel und ihres Scheitelkreises nach einem bestimmten Verhältnisse μ, so liegen die Teilpunkte auf einer Hyperbel $H_1^{(2)}$ und einer Ellipse $E^{(2)}$, deren Punkte paarweise, wie diejenigen von $H^{(2)}$ und $M^{(2)}$ durch den Scheitel A_1 und die Scheiteltangente a harmonisch getrennt werden.

Wie hieraus die elementare Theorie der Ellipse und Hyperbel sich ergiebt, sehe man in des Verfassers „Elementarsynthetische Geometrie der Kegelschnitte“ Seite 162.

220—235. Gemeinschaftlicher Ursprung von Ellipse und Hyperbel.

221. *In den Endpunkten einer Strecke AA_1 seien die Senkrechten a und a_1 errichtet; auf ihnen schneide man von A und*

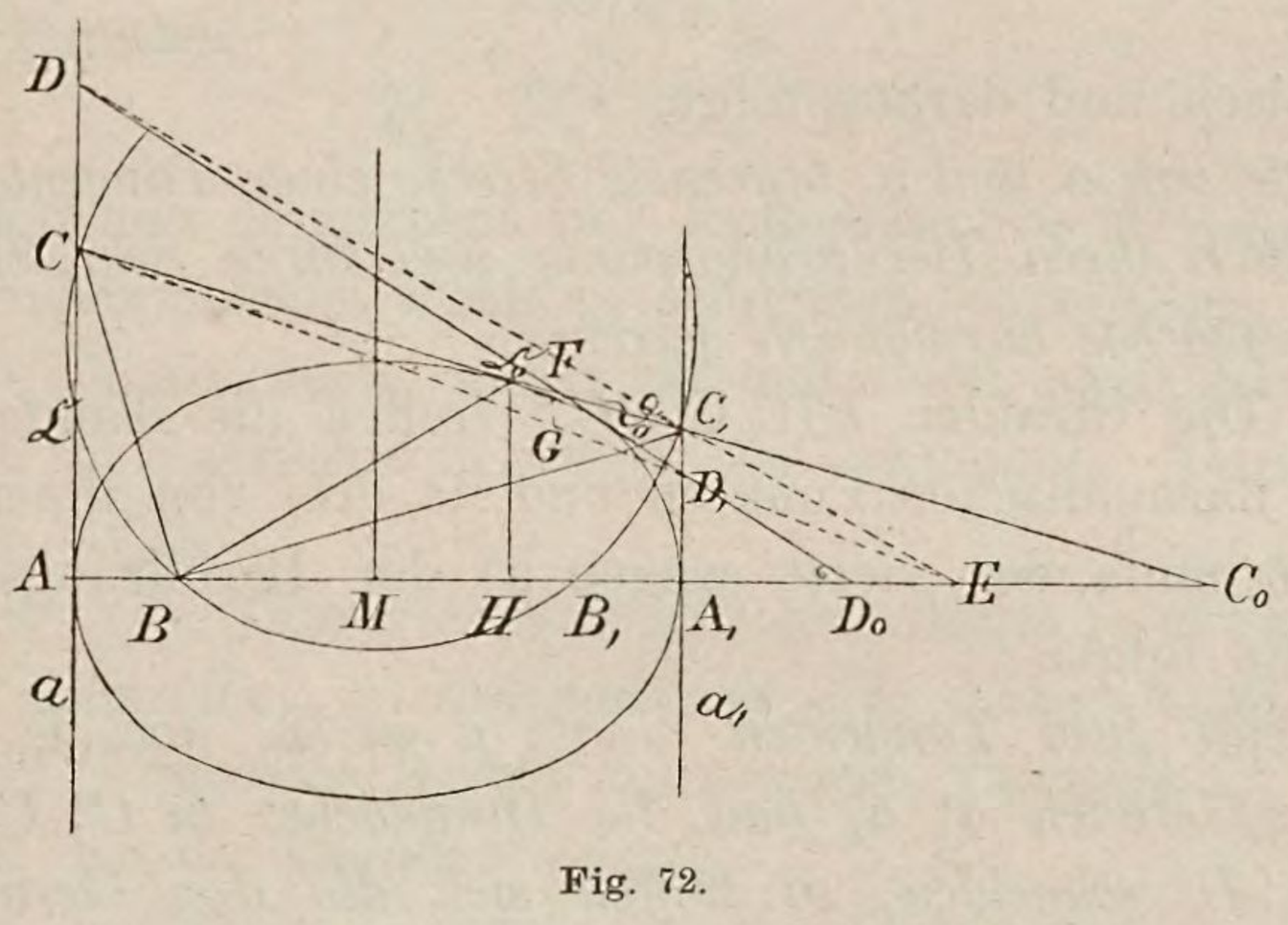

Fig. 72.

A_1 solche Strecken AC und A_1C_1 ab, dafs $AC \cdot A_1C_1 = b^2$ konstant ist; man soll die Kurve $K^{(2)}$ untersuchen, welche CC_1 einhüllt?

Die Strecken mögen auf a und a_1 nach derselben Richtung abgeschnitten werden.

Man mache noch $AD \,.\, A_1D_1 = b^2$, schneide die Hauptachse AA_1 mit CC_1 und DD_1 in C_0 und D_0. — Aus

$$AC \,.\, A_1C_1 = AD \,.\, A_1D_1$$

folgt die Proportion

$$AC : A_1D_1 = AD : A_1C_1$$

und hieraus schliefst man, dafs die Geraden CD_1 und C_1D sich in einem Punkte E der Hauptachse AA_1 schneiden:

Irgend zwei Tangenten von $K^{(2)}$ schneiden a und a_1 in solchen Punktpaaren CC_1 und DD_1, dafs CD_1 und C_1D sich in einem Punkte der Hauptachse AA_1 schneiden.

222. a) Wenn sich CC_1 und DD_1 in F schneiden, so ergiebt sich aus den Eigenschaften des vollständigen Vierseits, dafs E und F durch a und a_1 harmonisch getrennt sind.

Unter dem *Berührungspunkte* einer Tangente CC_1 mit $K^{(2)}$ versteht man denjenigen Punkt, in welchem diese Tangente von der unendlich benachbarten Tangente geschnitten wird.

Denkt man sich CC_1 fest und DD_1 bewegt, bis es unendlich nahe an CC_1 heranrückt, so wird F in den Berührungspunkt $\mathfrak{C}_0$ von CC_1 und E nach C_0 fallen. Es sind dann die Punkte

$$C_0\, \mathfrak{C}_0\, CC_1$$

harmonisch und daraus folgt:

Jede von a und a_1 begrenzte Strecke einer Tangente von $K^{(2)}$ wird durch ihren Berührungspunkt und ihren Schnittpunkt mit der Hauptachse harmonisch getrennt.

b) Die Strahlen $E(C_0\, \mathfrak{C}_0\, CC_1)$ treffen die Tangente DD_1 in vier harmonischen Punkten und da drei von ihnen $D_0\, D\, D_1$ sind, so mufs der vierte wegen a) der Berührungspunkt $\mathfrak{D}_0$ sein. Es folgt:

Wenn zwei Tangenten c und d in $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{D}_0$ berühren und die Geraden a, a_1 und die Hauptachse in C, C_1, C_0 und D, D_1, D_0 schneiden, so treffen sich die drei Geraden CD_1, C_1D, $\mathfrak{C}_0\mathfrak{D}_0$ in einem Punkte der Hauptachse.

223. Denkt man sich die Tangente CC_1 fest, DD_1 beweglich und zwar in solchen vier Lagen, dafs ihre Schnitt-

punkte $DD'D''D'''$ mit a vier harmonische Punkte sind, so müssen auch ihre Schnittpunkte $D_1D_1'D_1''D_1'''$ mit a_1 harmonische Punkte sein. Denn die vier harmonischen Strahlen $C_1(DD'D''D''')$ treffen die Hauptachse AA_1 in vier harmonischen Punkten $EE'E''E'''$, durch welche die Geraden $C(D_1D_1'D_1''D_1''')$ wegen des vorigen Satzes hindurchgehen müssen.

Die Schnittpunkte von CC_1 mit den vier Tangenten

$$DD_1, \quad D'D_1', \quad D''D_1'', \quad D'''D_1'''$$

seien

$$F, \quad F', \quad F'', \quad F'''.$$

Zieht man durch diese Punkte die Parallelen zu a, welche die Strahlen

$$CD_1, \quad CD_1', \quad CD_1'', \quad CD_1'''$$

in den Punkten

$$G, \quad G', \quad G'', \quad G'''$$

schneiden mögen, so müssen diese Punkte auf einer Geraden g liegen und harmonisch sein, denn sie trennen die Punkte

$$E, \quad E', \quad E'', \quad E'''$$

harmonisch von C und a_1. Daher sind

$$FG, \quad F'G', \quad F''G'', \quad F'''G'''$$

harmonische Strahlen und schneiden CC_1 in den vier harmonischen Punkten

$$F, \quad F', \quad F'', \quad F'''.$$

Wenn nun umgekehrt vier Tangenten von $K^{(2)}$ eine fünfte in vier harmonischen Punkten schneiden, so erkennt man zunächst, dafs sie auch a und a_1 und dann auch jede andere Tangente in harmonischen Punkten schneiden. Daraus aber folgt der Satz:

Wenn vier Tangenten von $K^{(2)}$ eine fünfte in harmonischen Punkten schneiden, so schneiden sie jede Tangente harmonisch. Solche vier Tangenten heifsen harmonische Tangenten.

224. Da die Geraden

$$\mathfrak{C}_0\mathfrak{D}_0, \quad \mathfrak{C}_0\mathfrak{D}_0', \quad \mathfrak{C}_0\mathfrak{D}_0'', \quad \mathfrak{C}_0\mathfrak{D}_0'''$$

durch die harmonischen Punkte

$$E, \quad E', \quad E'', \quad E'''$$

gehen, so sind es vier harmonische Strahlen und weil man $\mathfrak{C}_0$ als einen ganz beliebigen Punkt ansehen kann, so folgt:

Die Geraden, welche einen Punkt von $K^{(2)}$ mit den Berührungspunkten von vier harmonischen Tangenten verbinden, sind vier harmonische Strahlen.

225. *Solche vier Punkte von $K^{(2)}$, deren Verbindungslinien mit jedem fünften Punkte von $K^{(2)}$ harmonische Strahlen sind, heifsen harmonische Punkte.*

226. Unmittelbar folgt:

Zieht man durch einen Punkt von $K^{(2)}$ vier harmonische Strahlen, so treffen sie $K^{(2)}$ in vier harmonischen Punkten.

Zunächst ergiebt sich, dafs die Tangenten in diesen Punkten harmonische Tangenten sind.

227. *Die Polar- und Brennpunktseigenschaften* ergeben sich wie in 208 sqq.

228—233. *Die Brennpunktseigenschaften* ergeben sich jedoch auch unmittelbar.

228. *Beschreibt man über der Strecke CC_1, welche a und a_1 auf irgend einer Tangente von $K^{(2)}$ begrenzen, als Durchmesser einen Kreis, so schneidet er die Hauptachse in zwei festen Punkten, den Brennpunkten.*

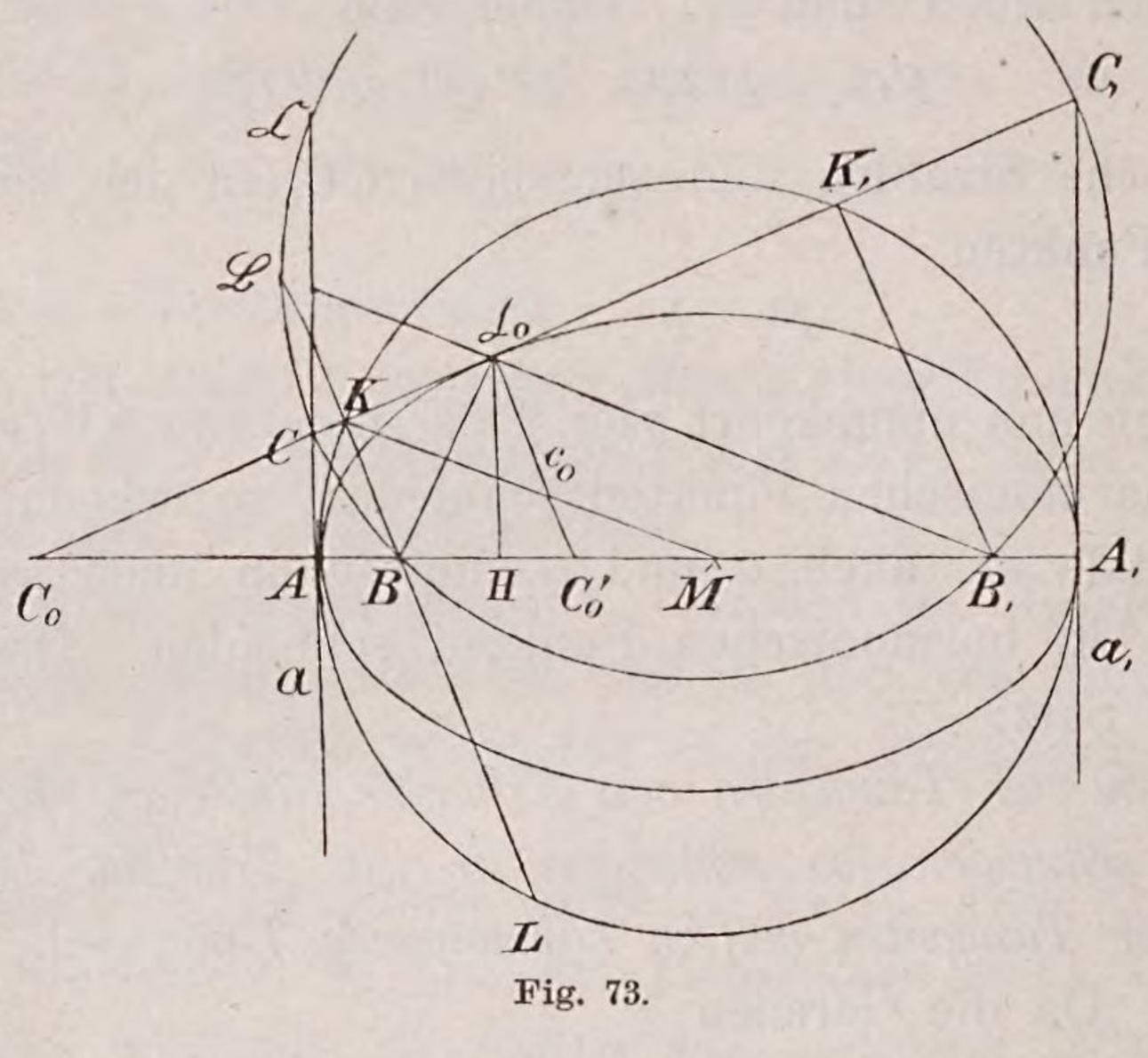

Fig. 73.

Dieser Kreis mag die Hauptachse in den Punkten B und

B_1, welche zu A und A_1 symmetrisch liegen müssen, und a noch in $\mathfrak{C}$ schneiden, dann ist

$$A\mathfrak{C} = A_1C_1$$

$$AC \,.\, A\mathfrak{C} = AB \,.\, AB_1 = b^2$$

also sind B und B_1 feste Punkte.

229. *Fällt man aus den Brennpunkten Lote auf irgend eine Tangente, so ist das Produkt derselben gleich dem Quadrate b^2 der halben Nebenachse.*

Die Lote auf CC_1 seien BK und B_1K_1; aus ähnlichen Dreiecken ergeben sich sofort die Proportionen

$$C_0C : C_0B = AC : BK$$

$$C_0C_1 : C_0B_1 = A_1C_1 : B_1K_1$$

und hieraus durch Multiplikation

$$C_0C \,.\, C_0C_1 : C_0B \,.\, C_0B_1 = AC \,.\, A_1C_1 : BK \,.\, B_1K_1.$$

Weil aber CC_1 und BB_1 Sehnen desselben Kreises sind, so ist

$$C_0C \,.\, C_0C_1 = C_0B \,.\, C_0B_1$$

und daher auch

$$BK \,.\, B_1K_1 = AC \,.\, A_1C_1 = b^2.$$

230. *Die Fufspunkte der Lote aus den Brennpunkten auf die Tangenten liegen auf dem Scheitelkreise,* (welcher AA_1 zum Durchmesser hat).

Um die Mitte M von AA_1 beschreibe man mit MK den Kreis $M^{(2)}$, so mufs er auch durch K_1 gehen. Er treffe KB noch in L, dann ist

$$BL = B_1K_1$$

und daher auch

$$BK \,.\, BL = b^2.$$

Dieser Kreis mag BB_1 noch in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_1$ schneiden, so ist

$$B\mathfrak{A} \,.\, B\mathfrak{A}_1 = BK \,.\, BL = b^2.$$

Es ist aber auch

$$BA \,.\, BA_1 = b^2$$

und da sowohl AA_1 wie $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ symmetrisch zu BB_1 liegen, so müssen sie zusammenfallen, also geht $M^{(2)}$ durch A und A_1.

231. *Die Brennpunktsstrahlen eines Kurvenpunktes bilden mit der Tangente desselben gleiche Winkel.*

Errichtet man in $\mathfrak{C}_0$ die Senkrechte c_0 auf der Tangente, so ist sie die Polare von C_0 in Bezug auf den Kreis über CC_1

und trennt daher (§ 5. 56) B und B_1 von C_0 harmonisch. Mithin sind

$$\mathfrak{C}_0 C_0, \quad c_0, \quad \mathfrak{C}_0 B, \quad \mathfrak{C}_0 B_1$$

harmonische Strahlen und weil

$$c_0 \perp \mathfrak{C}_0 C_0,$$

so ist:

$$\measuredangle C\mathfrak{C}_0 B = C_1 \mathfrak{C}_0 B_1.$$

232. *Die Summe der Brennpunktsstrahlen eines Kurvenpunktes ist gleich der Hauptachse.*

Da $C_0 C_0' B B_1$ harmonische Punkte sind, so müssen auch $C_0 \mathfrak{C}_0 K K_1$ harmonisch sein und $B_1 \mathfrak{C}_0$ mufs BK in demjenigen Punkte $\mathfrak{B}$ treffen, so dafs

$$BK = \mathfrak{B}K.$$

Daraus folgt, dafs

$$MK \parallel B_1 \mathfrak{B}$$

ist und hieraus die Proportion

$$B_1 \mathfrak{B} : MK = BB_1 : BM = 2 : 1,$$

also:

$$B_1 \mathfrak{B} = 2\,MK.$$

Weil aber (231 und 230)

$$\mathfrak{C}_0 B = \mathfrak{C}_0 \mathfrak{B} \quad \text{und} \quad 2\,MK = AA_1$$

ist, so ergiebt sich schliefslich

$$B\mathfrak{C}_0 + B_1 \mathfrak{C}_0 = AA_1.$$

233. *Konstruiert man auf der Verlängerung der Hauptachse einen Punkt C von der Lage, dafs*

$$MB \,.\, MC = a^2$$

und errichtet in ihm die Senkrechte l zur Hauptachse, so hat jeder Punkt des Kegelschnittes von B und l Abstände von konstantem Verhältnisse.

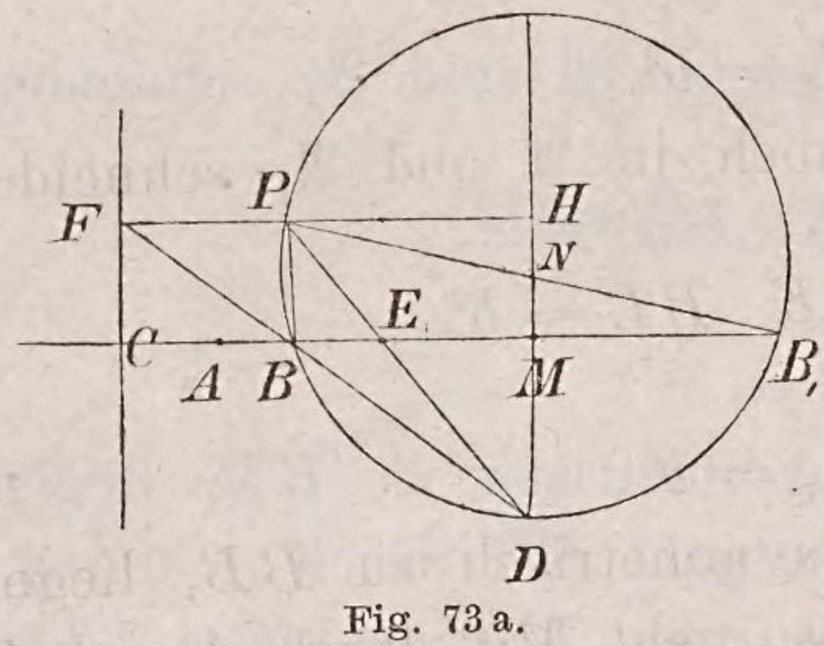

Fig. 73 a.

Legt man durch die beiden Brennpunkte BB_1 und einen beliebigen Punkt P des Kegelschnittes den Kreis $N^{(2)}$, welcher die Nebenachse in D schneidet, so ist

$$\sphericalangle BPD = B_1PD$$

$$BP : B_1P = BE : B_1E$$

$$BP + B_1P : BE + B_1E = a : c = BP : BE.$$

Zieht man durch P die Parallele zur Hauptachse, bis sie DB in F schneidet, so ist

$$\sphericalangle BFP = DBE = DB_1B = BPD$$

$$\triangle BFP \sim BPE$$

$$BP : BE = FP : BP = a : c,$$

also durch Zusammensetzen beider Proportionen

$$FP : BE = a^2 : c^2.$$

Aber aus ähnlichen Dreiecken folgt:

$$FP : BE = FH : BM = a^2 : c^2$$

und wenn man FX senkrecht zur Hauptachse fällt:

$$XM : BM = a^2 : c^2.$$

Dividiert man beide Seiten der Gleichung

$$MB \,.\, MC = a^2$$

durch $MB^2 = c^2$, so erhält man

$$CM : BM = a^2 : c^2,$$

also fällt X mit C und FX mit l zusammen und für jeden Punkt P des Kegelschnittes gilt

$$FP : BP = a : c.$$

234. a) *Verbindet man die Brennpunkte mit irgend zwei Kurvenpunkten, so berühren die vier Verbindungslinien einen Kreis.*

Aus 232. folgt sofort, dafs in dem entstandenen Vierecke die Summen der Gegenseiten gleich sind.

Aus dem vorhergehenden Satze ergeben sich wie in 158—161, aufser anderen Eigenschaften der Brennpunkte, wie 159 e. und g. auch die Polareigenschaften der Kurve.

235. *Gleichung der Kurve* $K^{(2)}$.

Setzt man $AA_1 = 2a$, halbiert es in M, fällt $\mathfrak{C}_0H \perp AA_1$, setzt (Fig. 73.)

$$MH = x, \quad \mathfrak{C}_0H = y,$$

so findet man aus den Proportionen

$$AC : y = C_0M - a : C_0M - x$$
$$A_1C_1 : y = C_0M + a : C_0M - x$$

durch Multiplikation:

$$AC \,.\, A_1C_1 : y^2 = C_0M^2 - a^2 : (C_0M - x)^2 \,.$$

Berücksichtigt man, dafs

$$AC \,.\, A_1C_1 = b^2$$
$$C_0M \,.\, x = a^2 ,$$

letzteres, weil wegen 222 a. AA_1C_0H harmonische Punkte sind, so folgt leicht

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Man nennt diese Kurve eine *Ellipse*; trägt man AC und A_1C_1 dagegen nach verschiedenen Richtungen hin ab, so erhält man die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und die Kurve wird eine Hyperbel.

236—261. Parabel, Ellipse, Hyperbel.

236. *Man soll den Ort $K^{(2)}$ eines Punktes untersuchen, dessen Abstände von einem festen Punkte B und einer festen Geraden l in einem konstanten Verhältnisse μ stehen.*

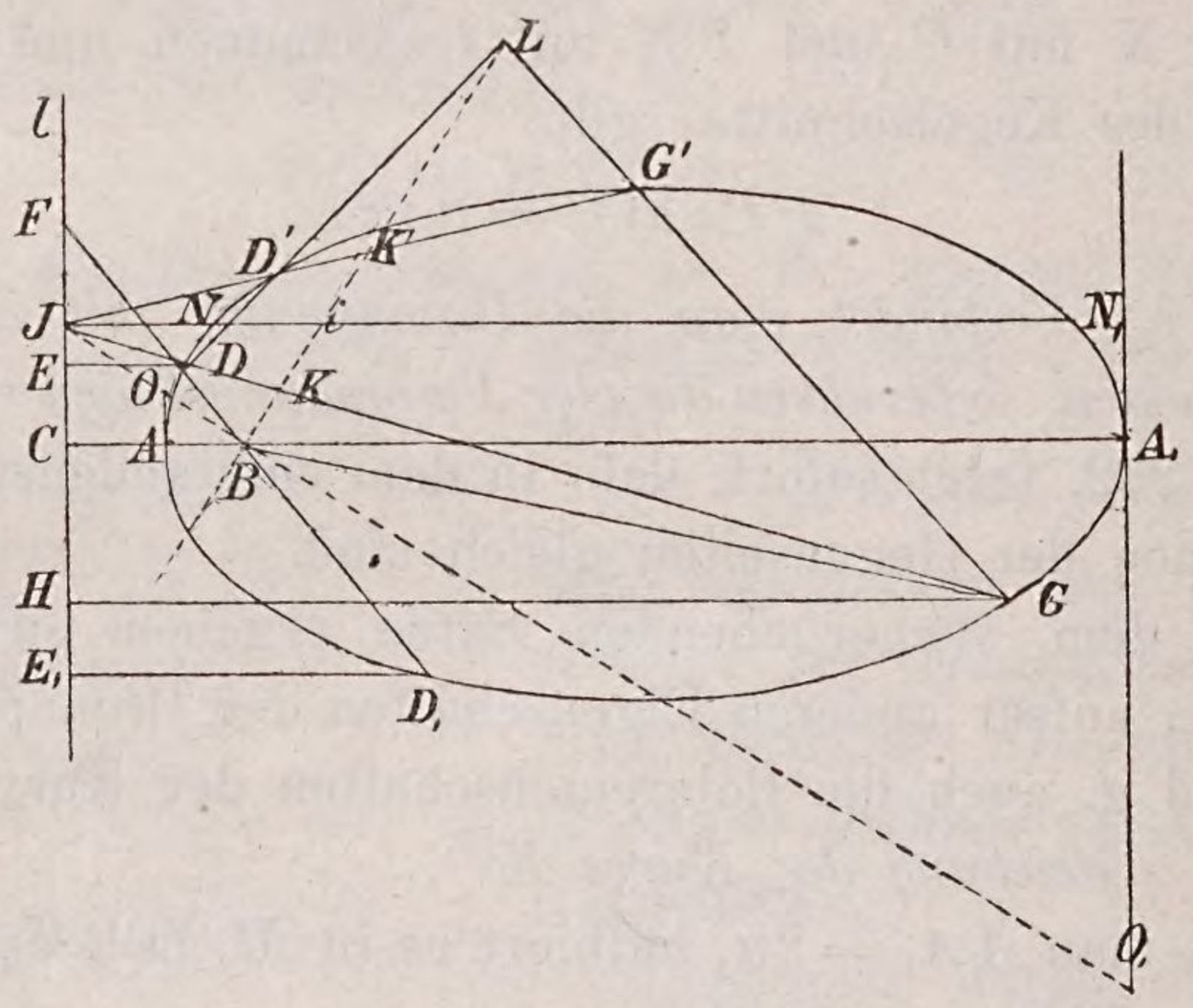

Fig. 74.

Zieht man durch den festen Punkt B, den *Brennpunkt* des Ortes, eine beliebige Gerade g, welche die feste Gerade l,

die *Leitlinie*, in F schneidet und fällt von irgend einem Punkt D derselben

$$DE \perp l,$$

so ist immer

$$DE : DF = BC : BF = \nu$$

konstant. — Soll nun D ein Punkt des Ortes $K^{(2)}$ sein, so ist auch

$$DB : DE = \mu,$$

also durch Multiplikation

$$DB : DF = \mu \,.\, \nu\,.$$

Man muſs also die Strecke BF in zwei Abschnitte teilen, deren Verhältnis $\mu \,.\, \nu$ ist; dies ist auf zwei Arten möglich, also giebt es auf jeder Geraden durch den Brennpunkt zwei Punkte des Ortes, welche durch B und l harmonisch getrennt werden.

237. *Verbindet man einen Punkt der Leitlinie mit dem Brennpunkte und errichtet in ihm auf der Verbindungslinie eine Senkrechte, so heiſst diese die Polare jenes Punktes.*

238. *Jeder Punkt der Leitlinie wird durch seine Polare von der Kurve harmonisch getrennt.*

Sind D und G zwei Punkte der Kurve, so schneide man l mit DG in I und fälle DE und GH senkrecht auf l, dann ist

$$DB : DE = GB : GH = \mu,$$

also auch mit Vertauschung der Mittelglieder

$$DB : GB = DE : GH = DI : GI.$$

Hieraus aber folgt, daſs BI der Nebenwinkel von DBG und die Polare i von I (237.) diesen Winkel selbst halbiert; folglich sind, wenn i und DG sich in K schneiden,

$$B(JKDG) \quad \text{und} \quad JKDG$$

harmonisch.

239. *Verbindet man den Brennpunkt mit den Berührungspunkten und dem Schnittpunkte zweier Tangenten, so halbiert die letzte Verbindungslinie den von den beiden ersten gebildeten Winkel.*

Zieht man durch J eine zweite Sehne $D'G'$, welche i in K' schneidet, so sind

$$JK'D'G'$$

harmonisch, folglich schneiden sich

$$KK', \quad DD', \quad GG'$$

in einem Punkte L. — Läfst man D' mit D und G' mit G zusammenfallen, so werden DD' und GG' Tangenten, D und G die Berührungspunkte, und weil

$$B(JKDG) \text{ harmonisch, } \sphericalangle JBK = 90^0,$$

so mufs auch

$$\sphericalangle DBL = GBL$$

sein.

240. *Die Strecke einer Tangente, welche von zwei festen Tangenten begrenzt wird, erscheint dem Brennpunkte unter einem konstanten Winkel.*

Dieser ist (239.) halb so grofs, wie derjenige Winkel unter welchem die Berührungssehne der festen Tangenten erscheint.

241. Fällt man vom Brennpunkte B das Lot BC auf l, so heifsen diejenigen beiden Punkte A und A_1, welche BC im Verhältnisse μ teilen, die *Scheitel* der Kurve, ihre Verbindungsstrecke die *Hauptachse* derselben. Macht man auf ihr

$$A_1B_1 = AB,$$
$$A_1C_1 = AC$$

und errichtet in C_1 die Senkrechte l_1, so heifst B_1 der zweite Brennpunkt und l_1 seine Leitlinie.

Die Senkrechten a und a_1 in A und A_1 sind die *Scheiteltangenten.*

242. *Die Kurve $K^{(2)}$ liegt symmetrisch in Bezug auf die Mittelsenkrechte m der Hauptachse AA_1.*

Durch J ziehe man die Parallele p zu AA_1; ist auf ihr N ein Punkt der Kurve, also

$$NB : NJ = \mu = AB : AC,$$

so errichte man in A und A_1 die Senkrechten a und a_1 auf der Hauptachse, welche BJ in O und O_1 schneiden mögen, dann ist auch

$$BO : OJ = BO_1 : O_1J = AB : AC = \mu,$$

also auch

$$NB : NJ = BO : OJ = BO_1 : O_1J,$$

folglich halbieren die Geraden NO und NO_1 den Winkel JNB und seinen Nebenwinkel und stehen also aufeinander senkrecht. Daher liegt N auf dem Kreise über OO_1, dessen Mittelpunkt der Durchschnitt von OO_1 mit der Mittelsenkrechten m von AA_1 ist. Dieser Kreis schneidet JN noch in einem zweiten Punkte N_1 der Kurve und diese liegt daher symmetrisch in Bezug auf m.

243. *Die Punkte der Kurve haben vom zweiten Brennpunkte B_1 und seiner Leitlinie l_1 das Abstandsverhältnis μ.*

Folgt aus dem vorigen Satze.

244. *Die Strecke einer Tangente zwischen den beiden Scheiteltangenten erscheint jedem Brennpunkte unter einem rechten Winkel.*

Folgt aus 239. und 240.

245. *Jede Tangente begrenzt auf den Scheiteltangenten Strecken von konstantem Produkte* (Fig. 73.).

Eine beliebige Tangente schneide die Scheiteltangenten in C und C_1, dann ist

$$\sphericalangle CBC_1 = 90^0$$

und der Kreis über CC_1 als Durchmesser geht durch B; er schneidet a noch in $\mathfrak{C}$ und wegen der symmetrischen Lage der Kurve zur Mittelsenkrechten m mufs

$$A\mathfrak{C} = A_1C_1$$

und deshalb:

$$AC \,.\, A_1C_1 = AC \,.\, A\mathfrak{C} = AB \,.\, AB_1,$$

also konstant sein.

246. Mit Hülfe dieses Satzes ergeben sich wie in 221—227. die Polareigenschaften der Kurve.

247. *Die Summe der Brennpunktsstrahlen eines Kurvenpunktes ist gleich der Hauptachse.* (Fig. 74.)

Die Gerade JN treffe l_1 noch in J_1, dann ist

$$NB = \mu \,.\, NJ, \quad NB_1 = N_1B = \mu \,.\, N_1J = \mu \,.\, NJ_1,$$

also durch Addition:

$$NB + NB_1 = \mu(NJ + NJ_1) = \mu \,.\, JJ_1.$$

In gleicher Weise folgt, wenn man l_1 mit AA_1 in C_1 schneidet:

$$AB + AB_1 = \mu \,.\, CC_1$$

und hieraus, weil $CC_1 = JJ_1$ ist,

$$NB + NB_1 = AA_1 .$$

248—254. Die Parabel.

Die Eigenschaften der Parabel ergeben sich aus denen der Ellipse und Hyperbel, wenn man $\mu = 1$ annimmt und a_1 ins Unendliche rücken läfst. Man leitet sie jedoch ungemein einfach unmittelbar ab.

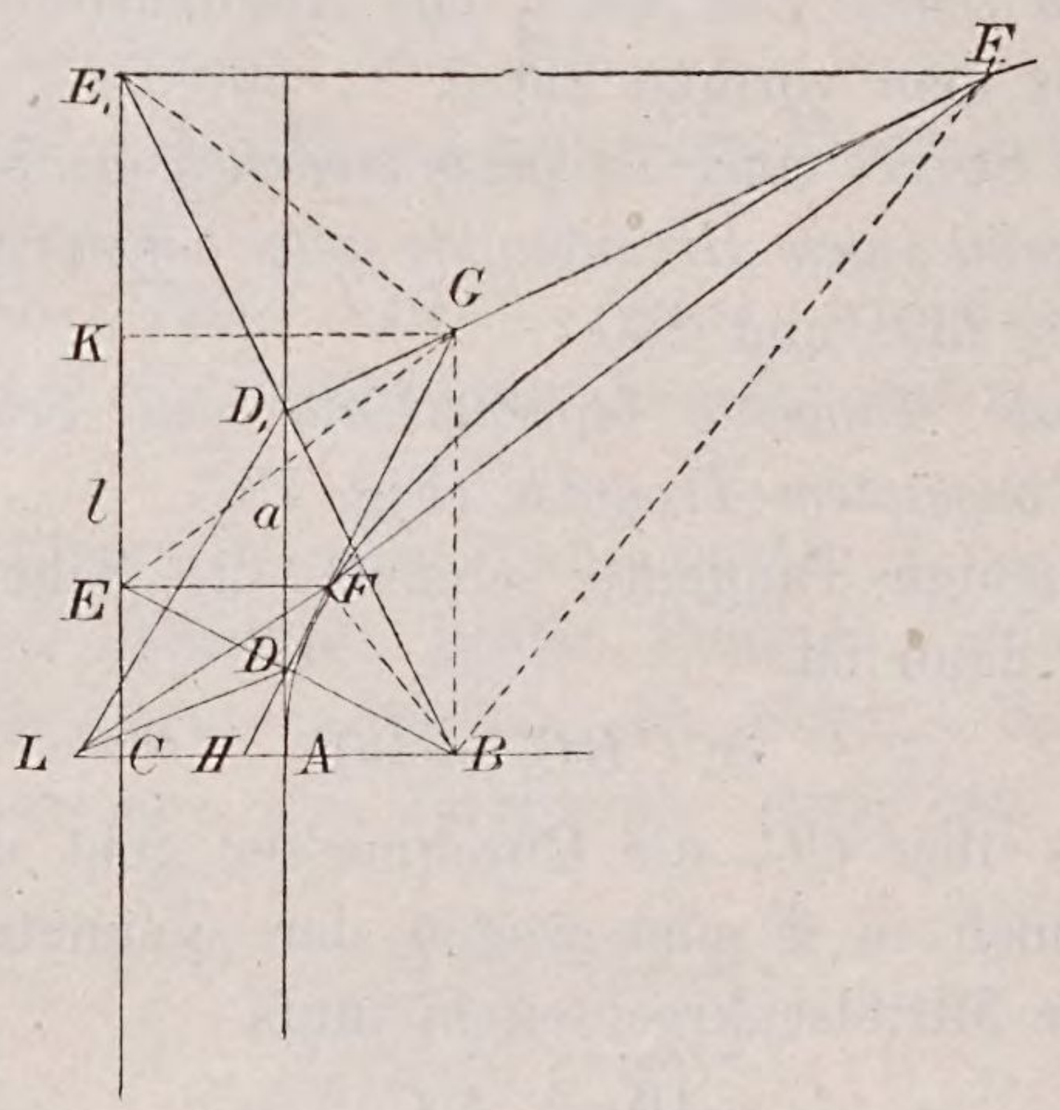

Fig. 75.

248. *Konstruktion von Parabelpunkten und Tangenten.* Ist F ein Punkt der Parabel, $FE \perp l$, so ist

$$FB = FE.$$

Halbiert man BC in A, so ist A auch ein Parabelpunkt; er heifst der *Scheitel der Parabel*. Die Senkrechte a in ihm ist die *Scheiteltangente*; die Richtung von BC heifst die *Achse*.

Die Strecke BE wird durch die Scheiteltangente in D halbiert und es ist

$$FD \perp BE.$$

Weil es auf DF aufser F keinen Punkt geben kann, der von B und l gleich weit entfernt ist, so ist DF eine Tangente und F der Berührungspunkt.

249. *Die Strecke einer Tangente zwischen dem Berührungspunkte und der Achse wird durch die Scheiteltangente halbiert.*

Verlängert man FD bis zum Durchschnitte H mit der Achse BC, so ergiebt sich leicht

$$DH = DF.$$

250. *Die Brennstrahlen nach den Berührungspunkten zweier Tangenten bilden mit dem Brennstrahle nach ihrem Schnittpunkte gleiche Winkel.*

Die Tangenten in F und F_1 schneiden sich in G; es sei $GK \perp l$, dann ist

$$\sphericalangle GBF_1 = GEF_1 = E_1GK = KGE,$$

letzteres, weil G auf den Mittelsenkrechten von BE und BE_1 liegt und also gleichweit von B, E, E_1 entfernt ist. — Ferner ist:

$$\sphericalangle KGE = GEF = GBF,$$

also schliefslich:

$$\sphericalangle GBF = GBF_1.$$

251. a) *Die Geraden, welche zwei Parabelpunkte mit dem Brennpunkte und dem unendlich fernen Punkte der Achse verbinden, berühren einen Kreis.*

Da

$$\sphericalangle EFG = BFG, \quad E_1F_1G = BF_1G$$
$$\sphericalangle FBG = F_1BG$$
$$EK = E_1K,$$

so ist G von den vier Geraden

$$BF, \quad BF_1, \quad EF, \quad EF_1$$

gleich weit entfernt.

b) Aus diesem Satze folgen wie in 158—161. die *Polareigenschaften der Parabel.*

252. *Zieht man durch diejenigen Punkte, in welchen zwei Parabeltangenten die Scheiteltangente treffen, Parallelen zu diesen Tangenten, so schneiden sie sich in demjenigen Punkte der Achse, durch den die Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte geht.*

Die Parallelen durch D und D_1 zu den Tangenten D_1F. und DF mögen sich in L schneiden, dann steht in dem Dreiecke BLD_1

$$BD \perp LD_1, \quad LD \perp BD_1,$$

also ist D der Höhenpunkt desselben und DD_1 mufs auf BL senkrecht stehen; weil aber DD_1 auf AB senkrecht steht, so fällt BL mit BA zusammen.

Auf den beiden Tangenten liegen, wenn man ihre unendlich fernen Punkte mit U und U_1 bezeichnet, die harmonischen Punktgrupprn

$$HFDU \text{ und } H_1F_1D_1U_1.$$

Weil sich nun die Geraden

$$HH_1, \quad DU_1, \quad D_1U$$

in einem Punkte L schneiden, so mufs auch FF_1 durch L gehen.

253. a) *Wenn vier Tangenten der Parabel eine fünfte Tangente in harmonischen Punkten schneiden, so schneiden sie jede Tangente harmonisch und ihre Berührungspunkte werden aus jedem Parabelpunkte durch vier harmonische Strahlen projiziert.*

Die Tangenten c und c_1 werden von den Tangenten

$$defg \text{ in den Punkten } DEFG \text{ und } D_1E_1F_1G_1$$

geschnitten; dann ist (250. 240.)

$$\sphericalangle DBD_1 = EBE_1 = FBF_1 = GBG_1$$

und wenn $DEFG$ harmonisch sind, so müssen auch $D_1E_1F_1G_1$ harmonisch sein, da die Strahlenbüschel

$$B(DEFG) \text{ und } B(D_1E_1F_1G_1)$$

kongruent sind.

Die vier Tangenten $defg$ mögen die Scheiteltangente a in vier harmonischen Punkten $D'E'F'G'$ schneiden; die Parallelen durch die letzten vier Punkte zu c schneiden die Achse in vier harmonischen Punkten $D''E''F''G''$.

Sind $\mathfrak{CDEFG}$ die Berührungspunkte der Tangenten, so müssen nach dem vorigen Satze die Strahlen

$$\mathfrak{C}(\mathfrak{DEFG}) \text{ durch } D''E''F''G''$$

gehen und sind deshalb harmonische Strahlen. Da man $\mathfrak{C}$ als einen beliebigen Parabelpunkt ansehen kann, so werden also die Berührungspunkte $\mathfrak{DEFG}$ aus jedem Parabelpunkte durch vier harmonische Strahlen projiciert.

b) *Werden vier Parabelpunkte aus einem anderen durch harmonische Strahlen projiciert, so schneiden die Tangenten in jenen jede andere Tangente harmonisch.*

Diese Umkehrung wird wie der vorige Satz bewiesen.

254. *Die Polareigenschaften der Parabel* ergeben sich nun wie in 208 sqq.

255. *Zwei Punkte B und B_1 liegen symmetrisch zum Mittelpunkte M eines Kreises $M^{(2)}$; der Ort einer Geraden g, welche den Kreis in solchen Punkten C und C_1 schneidet, daſs BC und B_1C_1 auf g senkrecht steht, ist eine Ellipse oder Hyperbel. — In welchem Falle wird derselbe eine gleichseitige Hyperbel?*

Die Gerade BB_1 schneide den Kreis in A und A_1, die Tangenten a und a_1 in diesen Punkten werden von der Geraden CC_1 in D und D_1 getroffen; letztere trifft AA_1 in E. Dann ist

$$EA : EC = AD : BC$$

$$EA_1 : EC_1 = A_1D_1 : B_1C_1 .$$

Durch Multiplikation und weil

$$EA \,.\, EA_1 = EC \,.\, EC_1$$

ist, erhält man

$$AD \,.\, A_1D_1 = BC \,.\, B_1C_1 .$$

Verlängert man CB bis es den Kreis nochmals in C' trifft, so ist

$$BC' = B_1C_1$$

$$BC \,.\, BC' = BA \,.\, BA_1 ,$$

also auch:

$$AD \,.\, A_1D_1 = BA \,.\, BA_1 .$$

cf. 221.

256. *Welches ist der Ort einer Ebene durch den Scheitel eines Kreiskegels, deren Parallelebenen den Kegel in gleichseitigen Hyperbeln schneiden?* *)

Der Scheitel des Kegels sei S, der Mittelpunkt des Grundkreises M. Durch den Grundkreis und die Spitze S lege man die Kugel $\omega^{(2)}$ mit dem Mittelpunkte O. Die Ebene

---

*) Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 1882. 3. Heft.

$[MSO]$ schneidet den Kegel in einem Dreiecke ABS und die Kugel in einem gröfsten Kreise, der Ebene der Zeichnung.

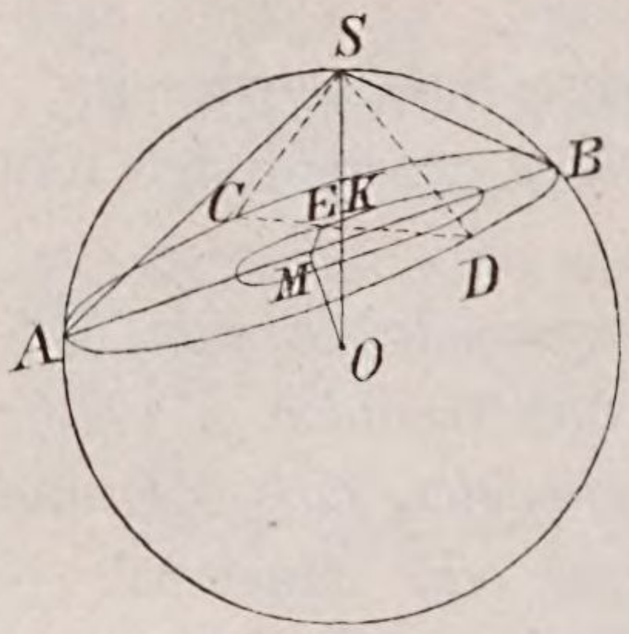

Fig. 76.

SC und SD seien zwei senkrechte Kegelstrahlen, so dafs also jede der Ebene (SCD) parallele Ebene den Kegel in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet. (§ 5. 56.)

Ist E die Mitte von CD, so ist

$$CE = DE = SE,$$

also E der Mittelpunkt des kleinen Kugelkreises, in welchem die Ebene $[CDS]$ die Kugel schneidet und folglich

$$OE \perp ES,$$

also liegt E auf einer Kugel über dem Durchmesser OS, deren Mittelpunkt K sei. Diese Kugel schneidet die Ebene des Grundkreises in einem Kreise $K^{(2)}$ und weil

$$ME \perp CD,$$

so ist der Ort von CD eine Ellipse oder Hyperbel. (255.)

257. *Zieht man von zwei Punkten der Potenzlinie eines Kreisbüschels Tangenten an einen Kreis, so besteht der Ort ihrer Schnittpunkte aus einer Ellipse und Hyperbel. — Unter welcher Bedingung erhält man eine Parabel und unter welcher eine gleichseitige Hyperbel?*

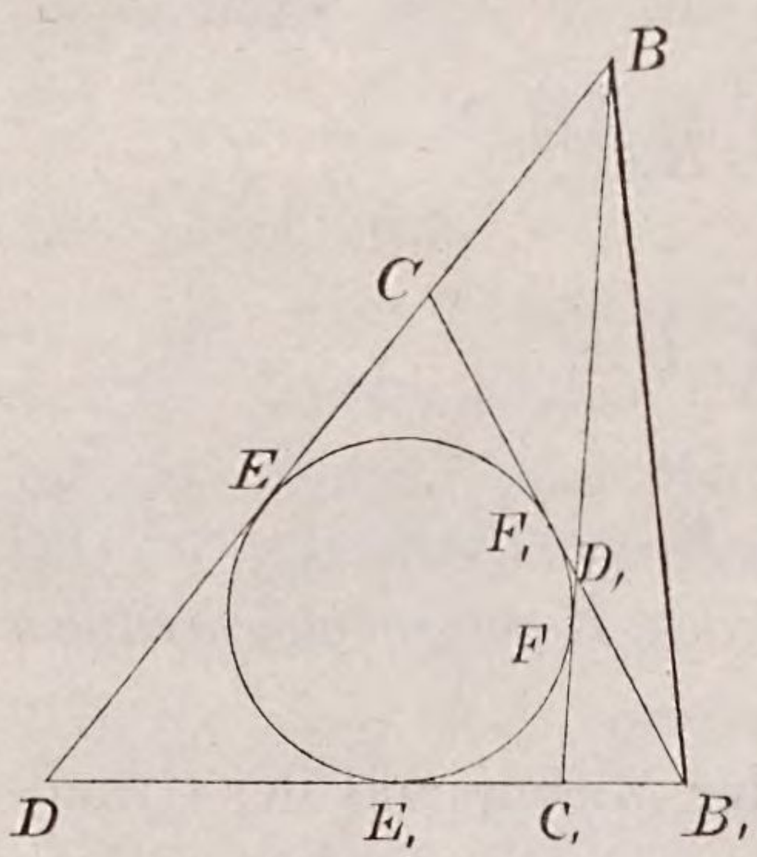

Fig. 77.

Sind B und B_1 die festen Punkte der Potenzlinie, t und t_1 die Längen ihrer Tangenten, so ziehe man an einen Kreis des Büschels die Tangenten. Sie mögen sich in CC_1DD_1 schneiden und den Kreis in EE_1FF_1 berühren. Dann ist:

$$\begin{aligned} CB_1 &= CF_1 + t_1 = CE + t_1 \\ &= t - CB + t_1, \end{aligned}$$

also:

$$CB_1 + CB = t + t_1$$

und ebenso

$$C_1B_1 + C_1B = t + t_1.$$

Ferner findet man:

$$DB = DE + t = DE_1 + t = DB_1 - t_1 + t,$$

also:

$$DB - DB_1 = t - t_1$$
$$D_1B - D_1B_1 = t - t_1.$$

Mithin beschreiben, wenn der Kreis das Büschel durchläuft, C und C_1 eine Ellipse, D und D_1 eine Hyperbel. Die Brennpunkte sind B und B_1, die Kreise des Büschels sind Vektorenkreise. cf. 160 a.

258. *Um eine Ellipse mit den Brennpunkten B und B_1* ist *ein Parallelogramm CDC_1D_1 gezeichnet; seine Ecken und die Brennpunkte liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel.*

C und C_1 sowie D und D_1 seien die gegenüberliegenden Ecken, dann ist

$$\sphericalangle CDB = C_1DB_1 \text{ (cf. 234. 159 g.)}$$
$$\sphericalangle CD_1B = C_1DB_1,$$

also auch

$$\sphericalangle CDB = C_1D_1B.$$

Folglich liegen $BB_1CC_1DD_1$ auf einer gleichseitigen Hyperbel, für welche BB_1, CC_1, DD_1 Durchmesser sind. cf. 8 a.

259. *Der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher zwei feste Kreise berührt, ist eine Ellipse oder Hyperbel. — Für welche Lage der Kreise wird die letztere gleichseitig?*

260. *In einer harmonischen Verwandtschaft*) ist einem Kreise $K^{(2)}$ eine gleichseitige Hyperbel $H^{(2)}$ verwandt, wenn die Sehne, welche der Kreis auf der Mittellinie m der Verwandtschaft begrenzt, dem Centrum S derselben unter einem rechten Winkel erscheint.*

Auf der Kurve $H^{(2)}$, welche dem Kreise $K^{(2)}$ verwandt ist, seien AB und CD zwei senkrechte Sehnen; ihnen seien die Kreissehnen $\mathfrak{AB}$ und $\mathfrak{CD}$ verwandt. Wenn diese die Mittellinie m der Verwandtschaft in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ schneiden, so sind $S\mathfrak{G}$ und $S\mathfrak{H}$ den Geraden AB und CD parallel, weil die den Punkten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ verwandten Punkte im Unendlichen liegen, also ist

$$\sphericalangle \mathfrak{G}S\mathfrak{H} = 90^0.$$

---

*) Milinowski. Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte.

Die Gegenseiten des Vierecks $\mathfrak{ABCD}$, nämlich

$$\mathfrak{AC} \text{ und } \mathfrak{BD}, \quad \mathfrak{AD} \text{ und } \mathfrak{BC}$$

mögen die Mittellinie m in

$$\mathfrak{G}_1 \text{ und } \mathfrak{H}_1, \quad \mathfrak{G}_2 \text{ und } \mathfrak{H}_2$$

schneiden; ferner seien $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{K}$ die Schnittpunkte von m und $K^{(2)}$, dann sind

$$\mathfrak{GH}, \quad \mathfrak{H}_1\mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{G}_2\mathfrak{H}_2, \quad \mathfrak{JK}$$

und

$$S(\mathfrak{GH}, \ \mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_1, \ \mathfrak{G}_2\mathfrak{H}_2, \ \mathfrak{JK})$$

vier Punkte und Strahlenpaare in Involution und weil

$$\sphericalangle \mathfrak{J}S\mathfrak{K} = \mathfrak{G}S\mathfrak{H} = 90^0,$$

so ist auch:

$$\sphericalangle \mathfrak{G}_1S\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{G}_2S\mathfrak{H}_2 = 90^0.$$

Da aber ganz wie vorhin folgt, dafs

$$S\mathfrak{G}_1 \parallel AC, \quad S\mathfrak{H}_1 \parallel BD, \quad S\mathfrak{G}_2 \parallel AD, \quad S\mathfrak{H}_2 \parallel BC,$$

so ist auch

$$AC \perp BD, \quad AD \perp BC.$$

Von den vier Punkten $ABCD$ ist also jeder der Höhenpunkt des von den drei anderen gebildeten Dreiecks. (cf. 9 a.)

Nimmt man AB als einen Durchmesser, so folgt sofort der Satz (cf. 8 a):

Jede Sehne von $H^{(2)}$ erscheint den Endpunkten eines Durchmessers unter gleichen oder supplementären Winkeln.

261. *Jeder Kegelschnitt durch die Ecken und den Höhenpunkt eines Dreiecks ist eine gleichseitige Hyperbel.*

ABC sei ein Dreieck, D sein Höhenpunkt. Die Höhen AD und BD treffen die Gegenseiten in E und F. Ueber EF als Durchmesser beschreibe man einen Kreis und nehme auf ihm einen beliebigen Punkt S als Centrum einer harmonischen Verwandtschaft, EF als Mittellinie derselben. Dem Vierecke $ABCD$ ist ein Rechteck $\mathfrak{ABCD}$ verwandt und dem Umkreise dieses Rechtecks ein Kegelschnitt $H^{(2)}$.

Wenn $\mathfrak{AB}$ und $\mathfrak{CD}$ die Mittellinie EF in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ schneiden, so sind die Geraden $S\mathfrak{G}$ und $S\mathfrak{H}$ den Seiten AB und CD parallel, weil den den Punkten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ verwandten Punkte im Unendlichen liegen. Also sind $S\mathfrak{G}$ und $S\mathfrak{H}$ senkrecht zu einander.

Schneiden ferner $\mathfrak{AC}$ und $\mathfrak{BD}$ die Mittellinie EF in $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$, so sind auch $S\mathfrak{G}_1$ und $S\mathfrak{H}_1$ zu einander senkrecht.

— Sind noch $\mathfrak{K}\mathfrak{J}$ die Schnittpunkte des Umkreises des Rechtecks mit EF, so sind

$$\mathfrak{G}\mathfrak{H},\quad \mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_1,\quad \mathfrak{K}\mathfrak{J}$$

drei Punktpaare einer Involution, also

$$S(\mathfrak{G}\mathfrak{H},\ \mathfrak{G}_1\mathfrak{H}_1,\ \mathfrak{K}\mathfrak{J})$$

drei Strahlenpaare einer Involution und weil die beiden ersten Paare rechte Winkel bilden, so mufs auch

$$S\mathfrak{K} \perp S\mathfrak{J}$$

sein. — Den Punkten $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{J}$ des Kreises sind zwei unendlich ferne Punkte des Kegelschnittes $H^{(2)}$ verwandt und da sie in senkrechten Richtungen liegen, so ist $H^{(2)}$ eine gleichseitige Hyperbel.

262 — 263. Beziehung zwischen der Quadratur der gleichseitigen Hyperbel und der Rektifikation der Parabel.

262. *Wenn ein Durchmesser einer Parabel $P^{(2)}$ dieselbe in E, ihre Leitlinie in D schneidet und man bestimmt auf DE über E hinaus einen Punkt P so, dafs DP gleich der Normale des Punktes E ist, so ist der Ort von P eine gleichseitige Hyperbel $H^{(2)}$.*

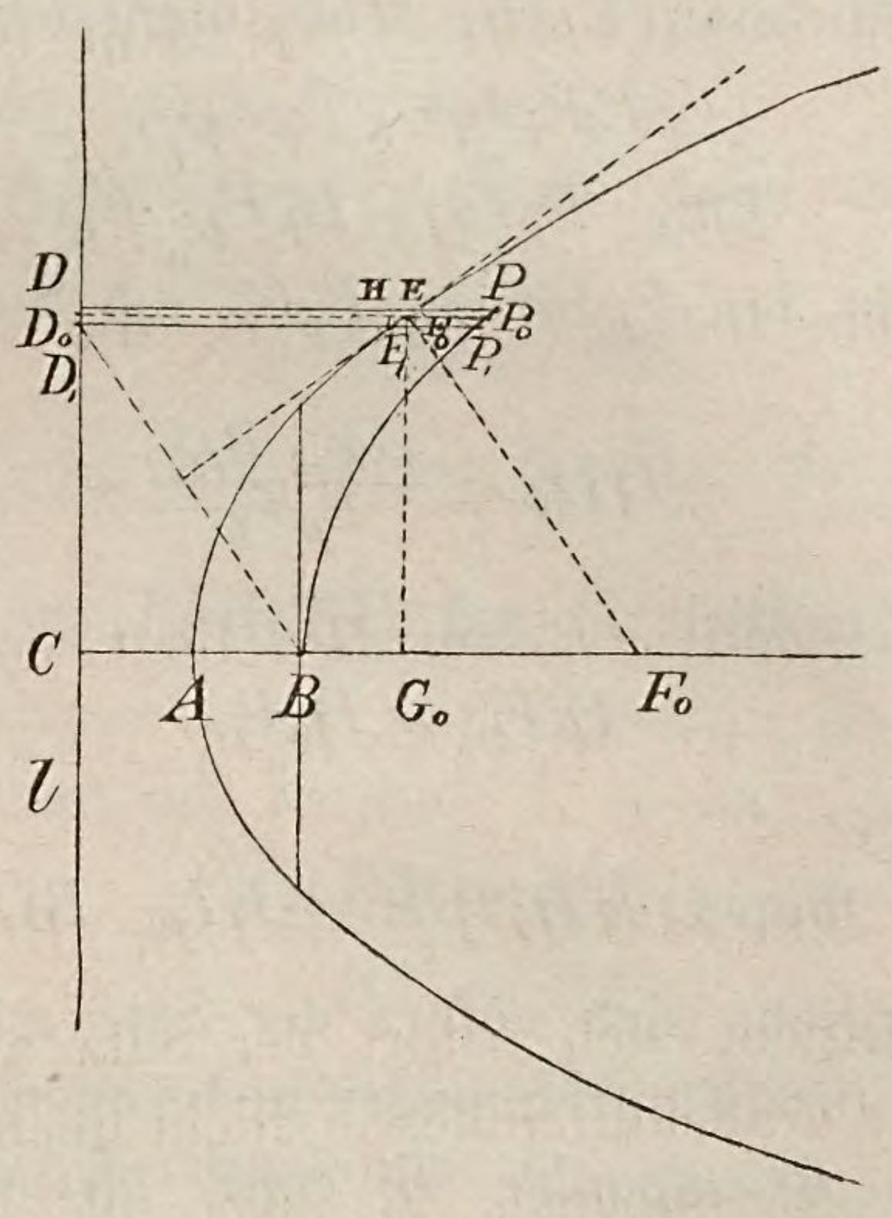

Fig. 78.

Es sei A der Scheitel, B der Brennpunkt, l die Leitlinie der Parabel, C der Durchschnitt der Leitlinie und der Achse.

Da die Normale von E gleich BD, so folgt der Satz aus 55. a), denn

$$PD^2 = BD^2 = CD^2 + CB^2.$$

263. *Zieht man zwei Durchmesser einer Parabel* $P^{(2)}$, *welche die Leitlinie in* D *und* D_1, *die Parabel in* E *und* E_1 *und die gleichseitige Hyperbel* $H^{(2)}$ *in* P *und* P_1 *treffen, so ist der Inhalt der Figur* DD_1P_1P *gleich dem Produkte aus dem Parabelbogen* EE_1 *und dem halben Parameter* BC.

Man denke sich zunächst die beiden Durchmesser so nahe nebeneinander, dafs man die Bogen EE_1 und PP_1 der Parabel und Hyperbel als gerade Strecken ansehen kann. Dann ist

$$\text{Trapez } DD_1P_1P = DD_1 \,.\, D_0P_0,$$

wenn D_0P_0 die Mittellinie des Trapezes ist. Diese mag die Parabel in E_0 schneiden. — Man ziehe in E_0 die Tangente an die Parabel. Diese steht auf BD_0 senkrecht, also ist die Normale E_0F_0 gleich und parallel BD_0. — Fällt man noch E_0G_0 senkrecht auf die Achse, so folgt leicht:

$$F_0G_0 = BC.$$

Von E_1 fälle man $E_1H \perp DP$, dann ist

$$\triangle EE_1H \sim E_0F_0G_0$$

$$EE_1 : E_1H = E_0F_0 : F_0G_0$$

oder, wenn man für E_1H und F_0G_0 die Strecken DD_1 und BC setzt,

$$DD_1 = \frac{EE_1 \,.\, BC}{E_0F_0}.$$

Weil aber endlich P_0 auf $H^{(2)}$ liegt, so ist auch

$$E_0F_0 = D_0P_0$$

und daher folgt:

$$\text{Trapez } DD_1P_1P = EE_1 \,.\, BC.$$

Hieraus ergiebt sich sofort der Satz auch für den Fall, dafs die beiden Parabeldurchmesser nicht unendlich nahe liegen.

264. *Im Brennpunkte* B *einer gleichseitigen Hyperbel schneiden sich senkrecht die Sehnen* EH *und* FG; *jeder der vier Punkte* $EFGH$ *ist der Höhenpunkt des von den drei anderen gebildeten Dreiecks.*

Von F und G fälle man die Senkrechten FC und GD auf EG und EF, so müssen sich dieselben auf EB, etwa in X, schneiden (9 a.). Dann ist

$$BF \,.\, BG = BE \,.\, BX.$$

Aus der Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel folgt aber auch

$$BF \,.\, BG = BE \,.\, BH,$$

also fallen X und H zusammen und H ist der Höhenpunkt des Dreiecks EFG.

265. *In jedem einer gleichseitigen Hyperbel eingeschriebenen Dreiecke, in welchem ein Brennpunkt ein Höhenfußspunkt ist, liegen die beiden anderen Höhenfußspunkte auf der Leitlinie dieses Brennpunktes.*

Folgt aus 40 d. oder 166.

266. *Bringt man in jedem einer gleichseitigen Hyperbel $H^{(2)}$ eingeschriebenen Dreiecke EFG, in welchem der Brennpunkt B ein Höhenfußspunkt ist, die Verbindungslinien des letzteren mit den beiden anderen Höhenfußspunkten C und D zum Durchschnitte mit den bezüglich durch D und C gehenden Höhen GD und FC, so ist der Ort der Schnittpunkte eine Parabel $P^{(2)}$, welche B und l auch als Brennpunkt und Leitlinie hat.*

Die Höhenfußspunkte C und D liegen auf der Leitlinie l (265.), deshalb ist (166.)

$$\sphericalangle CBD = 90^0;$$

denn C und D sind konjugierte Punkte, BC und BD konjugierte Strahlen.

Die Höhe DG halbiert den Winkel BDC; fällt man von dem Schnittpunkte P der Geraden BC und DG die Senkrechte PQ auf die Leitlinie l, so ist

$$\triangle BPD \cong QPD$$

$$BP = QP,$$

also ist der Ort von P eine Parabel, welche B zum Brennpunkte und l zur Leitlinie hat.

267. *Wenn sich zwei veränderliche Sehnen FG und EH senkrecht in einem Brennpunkte B einer gleichseitigen Hyperbel schneiden, so ist der Ort der Verbindungslinien ihrer Endpunkte*

eine Parabel, welche mit der gleichseitigen Hyperbel den Brennpunkt B und seine Leitlinie gemein hat.

I. Denn auf der Geraden GH, welche auf BQ senkrecht steht, giebt es aufser P keinen Punkt der Parabel $P^{(2)}$. (cf. 266.)

II. Nimmt man den Brennpunkt B und seine Leitlinie l als Centrum und Mittellinie einer harmonischen Verwandtschaft, so berührt der Parameterkreis, d. i. der um B mit dem halben Parameter beschriebene Kreis, die Nebenachse m. Da aber l die Entfernung zwischen B und m halbiert, so ist m die Achse der Verwandtschaft.

In dieser Verwandtschaft sind der Parameterkreis und die gleichseitige Hyperbel verwandte Figuren.

Sind nun FG und EH zwei sich senkrecht in B schneidende Sehnen der gleichseitigen Hyperbel, $\mathfrak{FG}$ und $\mathfrak{EH}$ die ihnen verwandten Kreissehnen, so sind

$$\mathfrak{EF},\quad \mathfrak{FH},\quad \mathfrak{HG},\quad \mathfrak{GE}$$

die vier Seiten eines dem Parameterkreise eingeschriebenen Quadrates. In dieses Quadrat läfst sich ein Kreis $\mathfrak{B}^{(2)}$ mit dem Mittelpunkte B konstruieren, welcher l, die Mittellinie der harmonischen Verwandtschaft, berührt. Ihm ist daher eine Parabel $P^{(2)}$ verwandt, welche B und l als Brennpunkt und Leitlinie hat. Diese berührt aber die Geraden

$$EF,\quad FH,\quad HG,\quad GE.$$

268. *Wenn sich zwei veränderliche Sehnen FG und EH senkrecht in einem Brennpunkte B einer gleichseitigen Hyperbel $H^{(2)}$ schneiden, so ist der Ort der Pole ihrer Verbindungslinien eine Hyperbel $H_1^{(2)}$, deren Asymptotenwinkel 120^0 beträgt, welche im Mittelpunkte M der gleichseitigen Hyperbel die Nebenachse m derselben berührt und mit ihr den Brennpunkt B und seine Leitlinie gemein hat.*

Die Pole der Geraden

$$\mathfrak{EF},\quad \mathfrak{FH},\quad \mathfrak{HG},\quad \mathfrak{GE}$$

seien

$$\mathfrak{P},\quad \mathfrak{Q},\quad \mathfrak{R},\quad \mathfrak{S}.$$

Sie liegen auf einem Kreise $\mathfrak{B}_1^{(2)}$ um B, welcher die Nebenachse m von $H^{(2)}$ im Mittelpunkte M berührt. Diesem

Kreise ist in der benutzten harmonischen Verwandtschaft eine Hyperbel $H_1^{(2)}$ verwandt, denn die Mittellinie l schneidet ihn in einer Sehne. Zu dieser gehört der Centriwinkel 120^0, also ist der Asymptotenwinkel von $H_1^{(2)}$ auch 120^0.

269. *Wenn sich zwei veränderliche Sehnen FG und EH senkrecht in einem Brennpunkte B einer gleichseitigen Hyperbel $H^{(2)}$ schneiden und man fällt aus ihm die Senkrechten auf die Verbindungslinie ihrer Endpunkte, so liegen die Fufspunkte auf einer Geraden, welche senkrecht zur Hauptachse steht und die Entfernung zwischen dem Brennpunkte B und seiner Leitlinie l halbiert.*

Nimmt man den Brennpunkt B zum Centrum und die Nebenachse m zur Basis einer harmonischen Verwandtschaft, so ist der gleichseitigen Hyperbel der um B beschriebene Parameterkreis $\mathfrak{B}^{(2)}$ verwandt, der von den Sehnen FG und EH in den verwandten Sehnen $\mathfrak{FG}$ und $\mathfrak{EH}$ geschnitten wird.

Von B fälle man auf EF die Senkrechte BK und schneide die Nebenachse m mit EF in L. Ist dann $\mathfrak{K}$ der zu K verwandte Punkt und trifft $L\mathfrak{K}$ die Leitlinie l, welche die Mittellinie der Verwandtschaft ist, in N, so mufs BN parallel KL sein, weil KL oder EF und $\mathfrak{K}L$ oder $\mathfrak{EF}$ verwandte Gerade sind und der dem Punkte N verwandte Punkt auf BN im Unendlichen liegt. Also ist

$$\sphericalangle NBK = 90^0.$$

Schneidet man die Leitlinie l mit $B\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{P}$, so ist

$$\sphericalangle \mathfrak{K}NB = \mathfrak{P}NB,$$

weil l vom Parameterkreise in einer Sehne geschnitten wird, welche gleich $\mathfrak{EF}$, der Seite des umgeschriebenen Quadrates ist.

Daher ist

$$\triangle \mathfrak{K}BN \cong \mathfrak{P}BN$$
$$\mathfrak{K}B = \mathfrak{P}B.$$

Durchläuft der Punkt $\mathfrak{P}$ die Leitlinie l, so mufs der Punkt $\mathfrak{K}$ eine Parallele $\mathfrak{p}$ durchlaufen; zwischen beiden Parallelen liegt B in der Mitte. Somit sind

$$B,\ g_\infty,\ l,\ \mathfrak{p}$$

harmonisch. Ihnen sind verwandt

$$B,\ l,\ g_\infty,\ p$$

und somit liegt p, welche die sämtlichen Fufspunkte K enthält, in der Mitte zwischen B und l.

270. *Im Brennpunkte B einer Parabel schneiden sich zwei veränderliche Sehnen senkrecht; die Pole der Verbindungslinien ihrer Endpunkte liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche mit der Parabel einen Brennpunkt und seine Leitlinie gemein hat.*

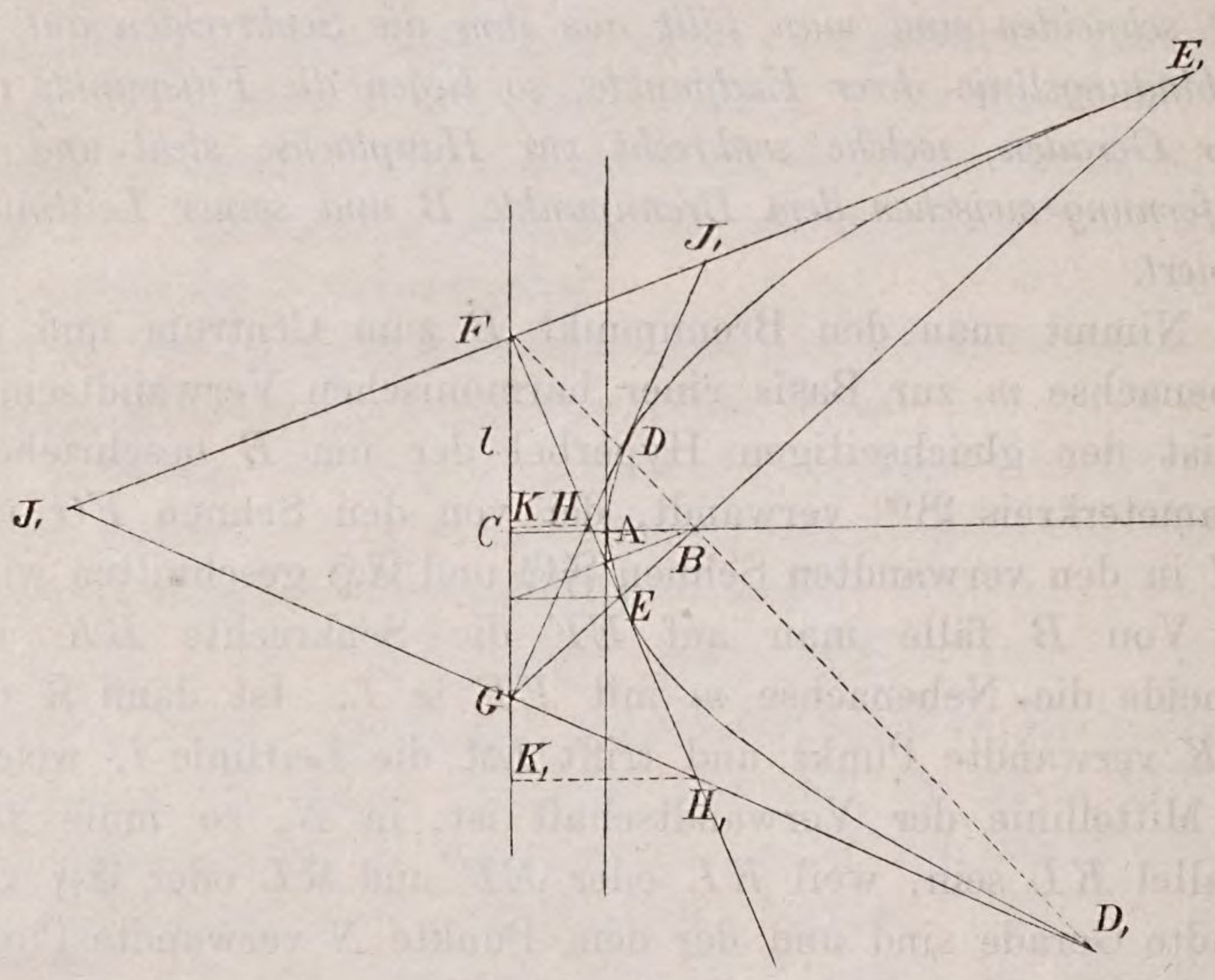

Fig. 79.

I. Die senkrechten Brennpunktssehnen der Parabel $P^{(2)}$ seien DD_1 und EE_1; in ihren Schnittpunkten F und G mit der Leitlinie l treffen sich die Tangenten durch ihre Endpunkte und stehen auf einander senkrecht. (cf. Milinowski Elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte).

Diese Tangenten mögen sich noch in HH_1JJ_1 schneiden, so ist jeder dieser vier Punkte der Höhenpunkt des von den drei anderen gebildeten Dreiecks.

Fällt man HK und H_1K_1 senkrecht auf l, so ist

$$HK : H_1K_1 = FH : FH_1.$$

Es ist aber ferner:

$$\sphericalangle HBH_1 = \tfrac{1}{2} DBD_1 = 90^0$$

$$\sphericalangle HBE = H_1BE,\ EBF = 90^0$$

also verhält sich

$$HB : H_1B = HE : H_1E = HF : H_1F$$

und daher auch:

$$HK : HB = H_1K_1 : H_1B.$$

Die vier Punkte HH_1JJ_1 haben also von B und l ein konstantes Abstandsverhältnis.

II. Um B konstruiere man den Parameterkreis $\mathfrak{B}^{(2)}$; dieser ist die harmonisch verwandte Kurve der Parabel in einer harmonischen Verwandtschaft, in welcher der Brennpunkt B das Centrum und die Leitlinie l die Mittellinie ist. Die Sehnen DD_1 und EE_1 schneiden ihn in den verwandten Sehnen $\mathfrak{D}\mathfrak{D}_1$ und $\mathfrak{E}\mathfrak{E}_1$, welche die Ecken eines eingeschriebenen Quadrates bilden. Die Pole $\mathfrak{H}\mathfrak{H}_1\mathfrak{J}\mathfrak{J}_1$ seiner Seiten liegen auf einem Kreise $\mathfrak{B}^{(2)}$ um B, welcher die Mittellinie in einer Sehne schneidet, die dem Punkte B unter einem rechten Winkel erscheint. Daher ist die dem Kreise $\mathfrak{B}^{(2)}$ harmonisch verwandte Kurve $H^{(2)}$ eine gleichseitige Hyperbel. (260.)

271. a) *Wenn zwei Kegelschnitte $K^{(2)}$ und $K_1{}^{(2)}$ einen Brennpunkt B und seine Leitlinie l gemein haben und ein Polygon gleichzeitig dem einen umgeschrieben und dem anderen eingeschrieben ist und die Seiten desselben dem Brennpunkte unter gleichen Winkeln erscheinen, so lassen sich unendlich viele solcher Polygone von gleicher Seitenzahl den beiden Kegelschnitten gleichzeitig um- und einschreiben, deren Seiten dem Brennpunkte unter gleichen Winkeln erscheinen.*

Man nehme den gemeinschaftlichen Brennpunkt zum Centrum und die Leitlinie zur Mittellinie einer harmonischen Verwandtschaft. In dieser sind den beiden Kegelschnitten zwei konzentrische Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1{}^{(2)}$ mit dem Mittelpunkte B verwandt. Jeder Sehne s von $K^{(2)}$, welche Tangente von $K_1{}^{(2)}$ ist, ist eine Sehne $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{K}^{(2)}$ verwandt, welche Tangente von $\mathfrak{K}_1{}^{(2)}$ ist; die Endpunkte beider Sehnen liegen auf zwei Geraden durch B und es erscheinen s und $\mathfrak{s}$ dem Brennpunkte unter gleichen Winkeln. Mithin läfst sich in $\mathfrak{K}^{(2)}$ ein regelmäfsiges Polygon zeichnen, welches den Kreis $\mathfrak{K}_1{}^{(2)}$ berührt; da es ein solches Polygon giebt, so giebt es unendlich viele und ihnen sind Polygone verwandt, welche dem Kegelschnitte $K^{(2)}$

eingeschrieben sind, den Kegelschnitt $K_1^{(2)}$ berühren und deren Seiten dem Brennpunkte B unter lauter gleichen Winkeln erscheinen.

b) Zwei Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ mit dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte B liegen so, dafs dem ersten ein gleichseitiges Dreieck eingeschrieben werden kann, dessen Seiten den zweiten berühren. Der Radius des ersten ist dann doppelt so grofs, wie der des zweiten.

Nimmt man B zum Centrum und eine Tangente l des zweiten Kreises $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ zur Mittellinie einer harmonischen Verwandtschaft, so ist dem Kreise $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ eine Parabel $P^{(2)}$ und dem Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$ eine Hyperbel $H^{(2)}$ mit der numerischen Exzentricität 2 verwandt. Beide Kegelschnitte haben B und l als Brennpunkt und Leitlinie.

Dem Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$ sei ein gleichseitiges Dreieck $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ eingeschrieben; ihm ist ein anderes PP_1P_2 verwandt. Von seinen Seiten erscheinen zwei dem Brennpunkte B unter Winkeln von 60^0 und die dritte unter einem Winkel von 120^0, also liegen BPP_1P_2 auf einem Kreise $O^{(2)}$ und PP_1P_2 ist ein gleichseitiges Dreieck, welches der Hyperbel $H^{(2)}$ eingeschrieben und der Parabel $P^{(2)}$ umgeschrieben ist.

Weil es unendlich viele dem Kreise $\mathfrak{K}^{(2)}$ eingeschriebene gleichseitige Dreiecke $\mathfrak{P}\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ giebt, welche dem Kreise $\mathfrak{K}_1^{(2)}$ umgeschrieben sind, so giebt es auch unendlich viele gleichseitige Dreiecke PP_1P_2, welche der Hyperbel $H^{(2)}$ ein- und der Parabel $P^{(2)}$ umgeschrieben sind.

Wenn P und P_1 auf dem zu B gehörigen Hyperbelzweige liegen, so ist

$$\sphericalangle PBP_1 = 120^0.$$

Macht man auf dem Kreise $O^{(2)}$

$$\text{Bog. } PU = \tfrac{1}{2}PB, \quad \text{Bog. } P_1U_1 = \tfrac{1}{2}P_1B,$$

so ist

$$\text{Bog. } UBU_1 = 180^0$$

also geht UU_1 durch den Mittelpunkt O des Kreises. Fällt man:

$$PQ \perp UU_1, \quad P_1Q_1 \perp UU_1,$$

so ist:

$$PQ = \tfrac{1}{2} PB, \quad P_1 Q_1 = \tfrac{1}{2} P_1 B$$

und also ist UU_1 die Leitlinie l der Hyperbel $H^{(2)}$.

Fällt man vom Brennpunkte B die Senkrechte BC auf die Leitlinie l und schneidet mit ihr den Kreis in A_1, so ist, weil l ein Durchmesser desselben ist,

$$BC = A_1 C$$

oder:

$$A_1 B : CB = 2 : 1$$

d. h. A_1 ist ein Punkt der Hyperbel $H^{(2)}$ und zwar der entferntere Scheitel. Somit folgt:

Ist einer Hyperbel $H^{(2)}$ mit der numerischen Exzentricität 2 ein gleichseitiges Dreieck eingezeichnet, so geht der Umkreis desselben durch den Brennpunkt desjenigen Zweiges, auf welchem zwei Ecken des Dreiecks liegen, und durch den vom Brennpunkte entfernteren Scheitel. Der nähere Scheitel ist der Höhenpunkt des Dreiecks. (9 e.)

Ist $H^{(2)}$ eine Hyperbel mit der numerischen Exzentricität 2 und legt man durch einen Brennpunkt B und den entfernteren Scheitel die Kreise eines Büschels, so schneidet jeder Kreis die Hyperbel in den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks. Die Seiten aller dieser Dreiecke berühren eine Parabel, welche mit der Hyperbel $H^{(2)}$ den Brennpunkt B und seine Leitlinie gemein hat.

d) Weil

$$\text{Bog. } BU = A_1 U,$$
$$\text{Bog. } BP = 2PU$$

ist, so folgt, dafs auch

$$\text{Bog. } BP = \tfrac{1}{3} BA_1$$

ist. Hierin liegt aber eine Auflösung der Aufgabe (cf. 104): *Einen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.*

Ist nämlich O der Scheitel des Winkels, so zeichne man um ihn einen Kreis, der die Schenkel in B und A_1 trifft und konstruiere eine Hyperbel $H^{(2)}$ mit der numerischen Exzentricität 2, welche B zum Brennpunkte und A_1 zum entfernteren Scheitel hat. Sie schneidet den zwischen den Schenkeln liegenden Bogen BA_1 in einem solchen Punkte P, dafs

$$\sphericalangle BOP = \tfrac{1}{3} BOA_1.$$

Henrici, J., Professor am Gymnasium zu Heidelberg, und **P. Treutlein,** Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementargeometrie. Dritter Teil: Lage und Grösse der stereometrischen Gebilde. Abbildungen der Figuren einer Ebene auf eine zweite (Kegelschnitte). Pensum für Prima. Mit 134 Figuren in Zinkographie. [VIII u. 194 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.80.

Hess, Dr. **Edmund,** a. o. Professor an der Universität Marburg, Einleitung in die Lehre von der Kugeltheilung mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendung auf die Theorie der gleichflächigen und der gleicheckigen Polyeder. Mit sechzehn lithographierten Tafeln. [X u. 476 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 14.—

Hochheim, Dr. **Adolf,** Professor, Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene. Heft II. Die Kegelschnitte. Abtheilung I. 2 Hefte. gr. 8. geh. n. *M.* 2.80.

A. Aufgaben. [IV u. 76 S.] n. *M* 1.20.

B. Auflösungen. [93 S.] n. *M.* 1.60.

Hoffmann, Prof. Dr. **Gustav,** Leitfaden für den physikalischen Unterricht in Lehrerinnenseminarien und höheren Töchterschulen. Mit Figuren im Text. [X u. 132 S.] gr. 8. geb. n. *M.* 2.—

Kirchhoff, Dr. **Gustav,** Professor der Physik an der Universität zu Berlin, Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. Dritte Auflage. [VIII u. 465 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 13.—

Neumann, Dr. **Carl,** Professor der Mathematik an der Universität Leipzig, hydrodynamische Untersuchungen, nebst einem Anhange über die Probleme der Elektrostatik und der magnetischen Induktion. [XL u. 320 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 11.20.

Neumann, Dr. **F.,** Professor der Physik und Mineralogie, Einleitung in die theoretische Physik. Vorlesungen gehalten an der Universität zu Königsberg. Herausgegeben von Dr. C. Pape, Professor der Physik an der Universität zu Königsberg. Mit in den Text gedruckten Figuren. [X u. 291 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 8.—

Pein, Dr. **A.,** Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Bochum, Aufgaben der sphärischen Astronomie, gelöst durch planimetrische Konstruktionen und mit Hülfe der ebenen Trigonometrie. Mit drei Figurentafeln. [VIII u. 48 S.] gr. 4. geh. n. *M.* 1.20. (In Kommission.)

Prix, Ernst, Oberlehrer an der Königl. Realschule I. O. zu Annaberg, Elemente der darstellenden Geometrie. Erster Teil. Darstellung von Raumgebilden durch orthogonale Projectionen. Mit in den Text gedruckten Figuren. [VII u. 72 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.20.

Prix, Ernst, Oberlehrer an der Königl. Realschule I. O. zu Annaberg, Elemente der darstellenden Geometrie. Zweiter Teil. Schnitte von ebenen und krummen Flächen. Schiefwinklige und axonometrische Projectionen. Centralprojection. Mit in den Text gedruckten Figuren. [IV u. 120 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.—

Quitzow, W. A., Lehrer an der Realschule zu Güstrow a. D., das Kopfrechnen in systematischer Stufenfolge. [VI u. 250 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.—

Schapira, Dr. **Hermann,** Mitglied der neurussischen naturforschenden Gesellschaft, Grundlage zu einer Theorie allgemeiner Cofunctionen. Vortrag gehalten in der mathematischen Section der 54. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Salzburg am 19. September 1881. [20 S.] gr. 4. geh. n. *M.* 1.20.

——— Erweiterung der Begriffe der arithmetischen Grundoperationen und der allgemeinen Cofunctionen. Zwei Vorträge gehalten in der mathematischen Section der 55. Versammlung deutscher Naturforscher und Aerzte zu Eisenach am 19. September 1882. [20 S.] gr. 4. geh. *M.* 1.—

Schlömilch, Dr. **Oskar,** Geh. Schulrat im Königl. Sächsischen Kultusministerium, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung einer Geometrie des Maßes. Ein Lehrbuch. Erstes Heft: Planimetrie. Sechste Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VI u. 162 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 2.—

——— ——— Zweites Heft: Ebene Trigonometrie. Sechste Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VI u. 97 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.60.

Streintz, Dr. **Heinrich,** a. o. Professor der mathematischen Physik an der Universität Graz, die physikalischen Grundlagen der Mechanik. [XII u. 142 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.60.

Tumlirz, Dr. **O.,** Privatdocent der Physik an der deutschen Universität in Prag, die elektromagnetische Theorie des Lichtes. [VIII u. 158 S. mit in den Text gedruckten Figuren.] gr. 8. geh. n. *M.* 3.60.

Wüllner, Dr. **Adolph,** Professor der Physik an der Königl. technischen Hochschule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. Zweiter Band: Die Lehre vom Licht. Vierte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. [VIII u. 704 S. mit zahlreichen Figuren im Text und 3 lithogr. Tafeln. gr. 8. geh. n. *M.* 10.—

J. Gruber.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Milinowski, Alfons,

Elementar-synthetische Geometrie der gleichseitigen Hyperbel

Leipzig 1883

Math.p. 358 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651478-2